Stanisław Łojasiewicz

Funkcje wypukłe a twierdzenie o przyrostach skończonych

Autor wykazuje, że w twierdzeniu o przyrostach skończonych: $f(b)-f(a)=f'(\Theta)\cdot(b-a)$ punkt pośredni Θ zależy w sposób ciągły od końców a,b przedziału jedynie w przypadku, gdy funkcja $f(x)$ jest wypukła. Udowodnione twierdzenie znajduje zastosowanie w rozwiązaniu równania funkcyjnego różniczkowo-iteracyjnego pewnego typu.

W twierdzeniu o przyrostach skończonych

$$f(b)-f(a)=f'(\Theta)(b-a)$$

„punkt pośredni" Θ zależy od a i b. Na ogół przez zadanie wartości a i b punkt Θ nie jest wyznaczony jednoznacznie; np. gdy $f(x)=\sin x$, $a=-\pi$, $b=\pi$, to $f(b)-f(a)=f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Jeżeli jednak funkcja f ma pochodną silnie monotoniczną (jest zatem silnie wypukła) punkt Θ jest wyznaczony jednoznacznie, gdyż wtędy nie może być $f'(\Theta_1)=f'(\Theta_2)$ przy $\Theta_1\neq\Theta_2$. W tym przypadku Θ zależy w sposób ciągły od a i b, bowiem funkcja $f'(x)$, jako silnie monotoniczna i posiadająca własność Darboux, jest ciągła, odwracalna, przy czym funkcja odwrotna g jest ciągła; wzór

$$\Theta=g\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$$

daje nam ciągłą zależność Θ od a i b.

Zapytajmy się, w jakich jeszcze przypadkach Θ zależy w sposób ciągły od a i b. Jeżeli $f(x)$ jest liniowa, to Θ nie jest wyznaczone jednoznacznie, bo może być dowolną liczbą z przedziału (a,b). Możemy jednak wybrać $\Theta=\frac{a+b}{2}$ i otrzymamy zależność ciągłą.

Wyżej wymienione przypadki wyczerpują dyskusję, gdyż poza tym Θ nie może zależeć w sposób ciągły od a i b. Udowodnimy mianowicie następujące:

Twierdzenie. Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada pochodną w przedziale (a,b), przy czym istnieje funkcja $h(x,y)$ określona dla $a<x<y<b$, ciągła ze

względu na każdą zmienną z osobna, taka, że $x < h(x,y) < y$ oraz

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(h(x,y))$$

dla $a < x \dot{<} y < b$, wówczas funkcja $f(x)$ jest liniowa lub silnie wypukła.

Udowodnimy najpierw dwa lemmaty wprowadzając następującą umowę:

Będziemy mówić, że kres górny (dolny) funkcji liczbo-liczbowej $f(x)$ w zbiorze Z jest zrealizowany w punkcie x_0, jeżeli istnieje ciąg x_n taki, że $x_n \to x_0$ i $f(x_n) \to \sup_Z f$ $(f(x_n) \to \inf_Z f)$.

Lemmat 1. Jeżeli zbiór punktów ciągłości funkcji $f(x)$ określonej w przedziale (a,b) jest wszędzie gęsty i w żadnym przedziale częściowym (c,d) ani kres dolny, ani kres górny funkcji f nie jest zrealizowany w żadnym z punktów wewnętrznych przedziału (c,d), wówczas funkcja $f(x)$, jest silnie monotoniczna.

Dowód. Funkcja $f(x)$ musi być monotoniczna (w sensie szerszym) w zbiorze punktów ciągłości. W przeciwnym bowiem razie istniałyby trzy punkty ciągłości $c<d<e$ takie, że $f(c)>f(d)<f(e)$ lub $f(c)<f(d)>f(e)$, skąd, wobec ciągłości funkcji f w punktach c i e, kres dolny lub górny funkcji f w przedziale (c,e) byłby zrealizowany w punkcie wewnętrznym przedziału (c,e) wbrew założeniu. Ogólniej z powyższego rozumowania wynika, że gdy $a<c<x<d<b$, przy czym c i d są punktami ciągłości, wówczas $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$ lub $f(c) \geqslant f(x) \geqslant f(d)$. Ponieważ funkcja f w zbiorze punktów ciągłości jest monotoniczna, więc stale zachodzić może tylko jedna z powyższych nierówności, a ponieważ zbiór punktów ciągłości jest wszędzie gęsty, więc $f(x)$ jest monotoniczna w przedziale (a,b). Silna monotoniczność wynika stąd, że funkcja $f(x)$ nie może być stała w żadnym przedziale, gdyż w przedziale stałości kres górny jest zrealizowany w dowolnym punkcie wewnętrznym tego przedziału.

Lemmat 2. Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada pochodną w przedziale (a,b), przy czym w żadnym przedziale częściowym (c,d) ani kres dolny, ani kres górny pochodnej $f'(x)$ nie jest zrealizowany w żadnym z punktów wewnętrznych przedziału (c,d), wówczas pochodna $f'(x)$ jest silnie monotoniczna.

Dowód. Ponieważ f' jest funkcją pierwszej klasy Baire'a, więc zbiór punktów nieciągłości funkcji f' jest zbiorem pierwszej kategorii, zatem zbiór punktów ciągłości jest wszędzie gęsty w (a,b). W myśl lemmatu 1, funkcja f' jest silnie monotoniczna.

Dowód twierdzenia. Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ jest liniowa w pewnym przedziale częściowym (c,d). Niech (c,e) będzie największym przedziałem o lewym końcu c, w którym funkcja $f(x)$ jest liniowa. Mamy więc $f'(x)=C$ w (c,e). Przypuśćmy, że $e<b$. Ponieważ $c<h(c,e)<e$ i $h(c,y)$ jest ciągła ze względu na y, więc $c<h(c,y)<e$, gdy y przebiega otoczenie punktu e; stąd

$$\frac{f(y)-f(c)}{y-c}=f'(h(c,y))=C,$$

czyli funkcja $f(x)$ jest liniowa w otoczeniu punktu e, co jest sprzeczne z określeniem przedziału (c,e). Musi więc być $e=b$, zatem funkcja $f(x)$ jest liniowa w przedziale (c,b). Podobnie dowodzimy, że $f(x)$ jest liniowa w przedziale (a,d), czyli jest liniowa w całym przedziale (a,b).

Pozostaje zatem rozpatrzyć przypadek, w którym funkcja $f(x)$ nie jest liniowa w żadnym przedziale częściowym przedziału (a,b). Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ nie jest silnie wypukła, czyli że pochodna $f'(x)$ nie jest silnie monotoniczna. W myśl lemmatu 2 musi istnieć przedział częściowy (c,d) i punkt $x_0\in(c,d)$ taki, że np. kres górny H pochodnej f' w (c,d) jest zrealizowany w x_0. Twierdzimy, że

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}<H, \quad \text{gdy} \quad c\leqslant x\leqslant x_0<y\leqslant d \quad \text{lub} \quad c\leqslant x<x_0\leqslant y\leqslant d. \tag{1}$$

Istotnie, nierówność jest oczywista, gdy $H=\infty$. W przypadku gdy $H<\infty$, funkcja $f(x)-H(x-x_0)$ jest malejąca w (c,d) i to silnie, gdyż założyliśmy, że funkcja $f(x)$ nie jest liniowa w żadnym przedziale częściowym przedziału (a,b). Jest więc dla $c\leqslant x\leqslant x_0<y\leqslant d$

$$f(x)-H(x-x_0)\leqslant f(x_0)<f(y)-H(y-x_0)$$

oraz dla $c\leqslant x<x_0\leqslant y<d$

$$f(x)-H(x-x_0)<f(x_0)\leqslant f(y)-H(y-x_0),$$

skąd wynika nierówność (1).

Weźmy teraz pod uwagę wyrażenia

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(h(x,y)) \tag{2}$$

oraz

$$h(x,y).$$

Wyrażenia te zmieniają się w sposób ciągły, gdy zmieniamy y od x_0 do d przy ustalonym $x=c$ i następnie x od c do x_0 przy ustalonym $y=d$. Ponieważ wtedy wobec (1)

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}<H,$$

więc również

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}<H_1<H$$

przy pewnym H_1; ponieważ zaś $h(x,y)$ przebiega wtedy wszystkie wartości pewnego otoczenia punktu x_0 (gdyż $h(c,x_0) < x_0 < h(x_0,d)$), więc, według (2), $f'(x) < H_1$ w otoczeniu punktu x_0; ale jest to niemożliwe, bo w x_0 jest zrealizowany kres górny H funkcji f' w (c,d). Funkcja $f(x)$ jest zatem silnie wypukła i dowód jest zakończony.

Udowodnione twierdzenie ma zastosowanie w rozwiązaniu pewnego równania funkcyjnego różniczkowo-iteracyjnego, które czytelnik znajdzie w pracy napisanej przez prof. S. Gołąba wspólnie z autorem niniejszego artykułu. Ma się ona ukazać w tomie II czasopisma „Annales Mathematici Polonici".

Katedra Analizy Matematycznej UJ
Otrzymano 20 maja 1954 r.

РЕЗЮМЕ

Выпуклые функции а теорема о среднем значении

Автор доказывает, что в формуле Лагранжа $f(b)-f(a)=f'(\theta)\cdot(b-a)$ средняя точка θ зависит непрерывно от коньцов a, b промежутка только тогда, когда функция $f(x)$ выпуклая. Доказанная теорема применяется при решении некоторого функционального дифференциального — итерационного уравнения.

SUMMARY

Convexe Functions and the Mean Value Theorem

The author shows that in mean value theorem $f(b)-f(a)=f'(\theta)\cdot(b-a)$ the middle point θ depends continuously on a and b merely in the case when the function $f(x)$ is convex. This property may by applied in the problem of solution of a certain functional differential-iterative equation.