

Stanisław Łojasiewicz

O zagadnieniu iteracji

Autor rozważa równanie funkcyjne $f(a, f(\beta, x)) = f(a + \beta, x)$ z warunkiem początkowym $f(1, x) = g(x)$ i dowodzi, że przy pewnych założeniach o funkcji $g(x)$ istnieje jedyne rozwiązanie $f(a, x)$, które wyraża się efektywnym wzorem.

Niech $g(x)$ będzie funkcją odwracalną, której polem i zapasem jest jeden i ten sam zbiór E . Wzory

$$g^n(x) = g(g(\dots g(x)\dots)), \quad g^0(x) = x, \quad g^{-n}(x) = g^{-1}(g^{-1}(\dots g^{-1}(x)\dots)),$$

gdzie g^{-1} jest funkcją odwrotną do g , określają k -tą iteratę $g^k(x)$ funkcji $g(x)$ dla dowolnego k całkowitego. Nasuwa się pytanie, jak określić a -tą iteratę funkcji $g(x)$, gdy a jest dowolną liczbą rzeczywistą? Łatwo sprawdzić, że funkcja $f(k, x) = g^k(x)$ spełnia równania $f(k, f(1, x)) = f(k+1, x)$, $f(1, x) = g(x)$ i jest przez nie wyznaczona jednoznacznie. Rozwiązanie tych równań, w których k przebiega wszystkie wartości rzeczywiste, można by więc uznać za uogólnienie iteraty całkowitej. W związku z tym formułuje się tak zwane *zagadnienie iteracji*:

Znaleźć jednoparametrową rodzinę funkcji $f(a, x)$ odwracalnych o wspólnym polu i zapasie E , w której parametr a przebiega zbiór liczb rzeczywistych i która czyni zadość następującym równaniom:

$$f(a, f(\beta, x)) = f(a + \beta, x), \quad (1)$$

$$f(1, x) = g(x). \quad (2)$$

Zagadnienie iteracji nie jest na ogół rozwiązalne jednoznacznie. Ogół rozwiązań otrzymuje się za pomocą teorii grup i przestrzeni jednorodnych w przypadku ogólnym, gdy parametr a przebiega jakąkolwiek grupę.

Zajmiemy się przypadkiem specjalnym, w którym zbiór E jest przedziałem liczbowym $(0, c)$, funkcja zaś $g(x)$ jest ciągła, rosnąca silnie, spełnia nierówność

$$0 < g(x) < x, \quad \text{gdzy} \quad 0 < x < c \quad (3)$$

oraz warunek

$$\left| \frac{g(y) - g(x)}{y - x} - k \right| < M(x + y) \text{ dla } x, y \text{ dostatecznie małych,} \quad (4)$$

gdzie k, M są pewnymi stałymi, przy czym

$$0 < k < 1. \quad (5)$$

Warunek ten pociąga za sobą istnienie pochodnej $g'(0) = k$, a jest na pewno spełniony, gdy istnieje $g''(0)$ oraz $g'(x)$ w otoczeniu punktu $x = 0$. Przy powyższych założeniach udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie. *Jedynym rozwiązaniem $f(a, x)$ zagadnienia iteracji mierzalnym ze względu na a i posiadającym pochodną $\frac{\partial f}{\partial x}(a, 0)$ dla każdego a , jest*

$$f(a, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g^{-n}(k^n g^n(x)).$$

Rozwiązanie to jest ciągłe.

Dowód. Oczywiście $g(0) = 0$. Mamy dla $x \in (0, c)$,

$$g^n(x) \rightarrow 0 \quad \text{i} \quad g^{-n}(x) \rightarrow c, \quad \text{gdy} \quad n \rightarrow \infty, \quad (6)$$

bowiem wobec (3) pierwszy z tych ciągów jest rosnący, a drugi malejący, zatem oba są zbieżne; granica z któregośkolwiek z nich nie może należeć do $(0, c)$, gdyż $g(z) = z$, więc muszą zachodzić związki (6).

Udowodnimy teraz, że istnieje granica

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g^n(x)}{k^n} = x \prod_{n=0}^{\infty} \frac{g^{n+1}(x)}{kg^n(x)} \quad \text{dla} \quad x \in (0, c). \quad (7)$$

Wobec (4) wyrażenie $\frac{1}{u} \left| \frac{g(u)}{ku} - 1 \right|$ jest ograniczone dla $u \in (0, c)$, więc istnieje A takie, że

$$\left| \frac{g(u)}{ku} - 1 \right| < A|u| \quad \text{dla} \quad u \in (0, c). \quad (8)$$

Niech $k < q < 1$. Według (8) $g(u) < (k + kAu)u$, gdy więc $u < \frac{q-k}{kA}$, to $g(u) < qu$, skąd drogą indukcji otrzymujemy

$$g^n(u) < q^n u, \quad \text{gdy} \quad u < \frac{q-k}{kA}. \quad (9)$$

Weźmy dowolne $x \in (0, c)$; według (6) będziemy mieć $g^N(x) < \frac{q-k}{kA}$ dla pewnego N , więc wobec (9) $g^{N+n}(x) < q^n g^N(x)$. Mamy więc

$$\sum_{n=0}^{\infty} g^n(x) < \infty \quad \text{dla} \quad x \in (c, 0). \quad (10)$$

Według (8) dla dowolnego $x_0 < c$ jest

$$\left| \frac{g^{n+1}(x)}{kg^n(x)} - 1 \right| < A g^n(x) < A g^n(x_0), \quad \text{gdy} \quad 0 < x < x_0,$$

skąd wobec (10) iloczyn z prawej strony związku (7) jest jednostajnie zbieżny w $(0, x_0)$. Jeżeli więc położymy $\varphi(0) = 0$, to granica (7) istnieje w $[0, c)$, zbieżność jest niemal jednostajna, funkcja $\varphi(x)$ jest ciągła w $[0, c)$ i dodatnia w $[0, c)$. Nadto, ponieważ z uwagi na (9) dla dostatecznie małych x mamy

$$1 - Aq^n x < \frac{g^{n+1}(x)}{kg^n(x)} < 1 + Aq^n x,$$

więc

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 - Aq^n x) < \frac{\varphi(x)}{x} < \prod_{n=0}^{\infty} (1 + Aq^n x),$$

skąd

$$\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 1.$$

Wykażemy teraz, że funkcja $\varphi(x)$ jest odwracalna w $[0, c)$. Niech $x, y \in [0, c)$, $x \neq y$. Mamy

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{g^n(y) - g^n(x)}{k(g^{n-1}(y) - g^{n-1}(x))}. \quad (11)$$

Ponieważ według (4) i (6)

$$\left| \frac{g^n(y) - g^n(x)}{k(g^{n-1}(y) - g^{n-1}(x))} - 1 \right| < M(g^{n-1}(x) + g^{n-1}(y)),$$

więc iloczyn z prawej strony związku (11) jest zbieżny wobec (10), i nie jest zerem, gdyż wszystkie jego wyrazy są różne od zera. Stąd $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Na podstawie związku (7) łatwo sprawdzić, że funkcja $\varphi(x)$ spełnia tzw. równanie Schrödera

$$\varphi(g(x)) = k\varphi(x). \quad (12)$$

Otrzymujemy stąd drogą indukcji $\varphi(g^{-n}(x)) = k^{-n}\varphi(x)$, skąd wobec (5) i (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(g^{-n}(x)) = \infty$, gdy tylko $x \neq 0$. Zapasem funkcji $\varphi(x)$ jest więc przedział $(0, \infty)$.

Niech teraz $f(a, x)$ będzie rozwiązaniem zagadnienia iteracji, mierzalnym ze względu na a i niech $\lambda(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, 0)$; $\lambda(a)$ jest więc funkcją mierzalną. Ze związku (1) otrzymujemy przez różniczkowanie $\lambda(a)\lambda(\beta) = \lambda(a + \beta)$, wobec zaś (2) $\lambda(1) = k$, skąd według twierdzenia Banacha¹⁾ jest $\lambda(a) = k^a$. Z uwagi na (6) mamy więc dla $x \neq 0$

$$\frac{f(a, g^n(x))}{g^n(x)} \rightarrow k^a.$$

¹⁾ S. Banach, *Sur l'équation fonctionnelle* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, „Fundamenta Mathematicae“, tom I, Warszawa 1920, str. 123—124.

Ponieważ zaś

$$f(\alpha, g^n(x)) = g^n(f(\alpha, x))$$

oraz

$$\frac{g^n(f(\alpha, x))}{g^n(x)} \rightarrow \frac{\varphi(f(\alpha, x))}{\varphi(x)},$$

więc

$$\frac{\varphi(f(\alpha, x))}{\varphi(x)} = k^\alpha,$$

skąd

$$f(\alpha, x) = \varphi^{-1}(k^\alpha \varphi(x)). \quad (13)$$

Sprawdzamy, że wzór ten jest słuszny również dla $x=0$.

Rozwiązanie $f(\alpha, x)$ jest więc wyznaczone jednoznacznie. Na odwrót, opierając się na związku (12), sprawdzamy, że wzór (13) daje rozwiązanie równań (1) i (2) ciągle i takie, że $\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, 0)$ istnieje.

Udowodnimy na koniec, że zachodzi wzór

$$f(\alpha, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g^{-n}(k^\alpha g^n(x)). \quad (14)$$

Weźmy $x \in (0, c)$ i połóżmy $c_n = g^{-n}(k^\alpha g^n(x))$. Mamy więc

$$\frac{g^n(c_n)}{k^n} = k^\alpha \frac{g^n(x)}{k^n} \rightarrow k^\alpha \varphi(x).$$

Weźmy $x_0 \in (0, c)$ takie, że $k^\alpha \varphi(x) < \varphi(x_0)$. Ponieważ $\frac{g^n(x_0)}{k^n} \rightarrow \varphi(x_0)$, więc

dla dostatecznie dużych n będziemy mieć $\frac{g^n(c_n)}{k^n} < \frac{g^n(x_0)}{k^n}$, czyli $c_n < x_0$.

Przypuśćmy, że dla pewnego ciągu wybranego $c_{a_n} \rightarrow c$. Z uwagi na to, że zbieżność w (7) jest jednostajna w przedziale $[0, x_0)$, mamy

$$\frac{g_{a_n}(c_{a_n})}{k^{a_n}} \rightarrow \varphi(c),$$

skąd

$$k^\alpha \varphi(x) = \varphi(c) \text{ i } c = \varphi^{-1}(k^\alpha \varphi(x)) = f(\alpha, x).$$

Zatem

$$c_n \rightarrow f(\alpha, x), \quad \text{c. b. d. o.}$$

Uwaga. Można wykazać, że gdy funkcja $g(x)$ jest analityczna, wzór (13) lub (14) daje rozwiązanie analityczne. Należy w tym celu dowód powyższy prowadzić w obszarze zawierającym odcinek $[0, c)$, w którym jeszcze zachodzi nierówność (8) i operować w rozumowaniu pochodnymi zamiast ilorazami różnicowymi.

Katedra Analizy Matematycznej UJ

Otrzymano 20 maja 1954 r.

РЕЗЮМЕ

O итерационной задаче

Автор исследует функциональное уравнение $f(a, f(\beta, x)) = f(a + \beta, x)$ с начальным условием $f(1, x) = g(x)$ и доказывает что при некоторых предположениях относительно функции $g(x)$ функция $f(x)$ существует только одна и дает ей конструкцию.

SUMMARY

On the Problem of Iteration

The author deals with the functional equation $f(a, f(\beta, x)) = f(a + \beta, x)$ with initial condition $f(1, x) = g(x)$ and proves that under certain assumptions concerning $g(x)$ the function $f(a, x)$ is determined uniquely. The construction of $f(a, x)$ is given by an explicit formula.