

Andrzej Lasota

## Gwiazdzistość zbioru określoności funkcji uwikłanych

W artykule omówiono pewną własność geometryczną zbioru określoności układu funkcji uwikłanych. Podstawowe twierdzenie autor sformułował i udowodnił dla układu funkcji podanego w postaci wyraźnej, a następnie wykorzystał klasyczne twierdzenie o rozwikłalności. Otrzymany wynik można uważać za uzupełnienie tego klasycznego twierdzenia.

W niektórych rozumowaniach analizy matematycznej, a w szczególności w teorii funkcji uwikłanych, spotykamy się z następującą operacją:

Dany jest ciąg funkcji:  $f_1(x_1 \dots x_m) \dots f_n(x_1 \dots x_m)$  określonych w otoczeniu punktu  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m)$  oraz zbiór  $D$  w przestrzeni  $n + m$  wymiarowej zawierający w swoim wnętrzu punkt  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m, \hat{y}_1 \dots \hat{y}_n)$ , gdzie

$$\hat{y}_i = f_i(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m) \quad i = 1, \dots, n.$$

Następnie zacieśniamy warunek

$$y_i = f_i(x_1 \dots x_m) \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

do zbioru  $D$ , to znaczy rozpatrujemy tylko takie punkty  $(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n)$  spełniające równania (1), które należą do  $D$ .

O występującym w tej operacji zbiorze  $D$  zakłada się zwykle, iż jest on geometrycznie figurą dość prostą — kulą lub kostką o środku w punkcie  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m, \hat{y}_1 \dots \hat{y}_n)$  — i ma średnicę mniejszą od pewnej z góry zadanej liczby  $\varepsilon > 0$  wyznaczonej przez całość rozumowania.

Oznaczmy przez  $\Delta$  zakres  $x$ -owy tak otrzymanego warunku, to jest ogół takich punktów  $(x_1 \dots x_m)$  ze zbioru określoności funkcji  $f_1 \dots f_n$ , dla których punkty  $[x_1 \dots x_m, f_1(x_1 \dots x_m) \dots f_n(x_1 \dots x_m)]$  należą do zbioru  $D$  i spełniają równania (1).

Nasuwa się teraz pytanie, jakie własności geometryczne posiada zbiór  $\Delta$ , jeżeli funkcje  $f_1 \dots f_n$  są regularne, np. klasy  $C^1$ , a zbiór  $D$  posiada średnicę dostatecznie małą. Okazało się, że jedną z takich własności zbioru  $\Delta$  jest gwiazdzistość względem punktu  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m)$ .

Definicja. Zbiór  $\Delta$  nazywamy gwiazdzistym względem punktu  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m)$ , jeżeli zawiera on każdy odcinek łączący punkt  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m)$  z dowolnym punktem  $(x_1 \dots x_m)$  należącym do tego zbioru.

Gwiazdzistość zbioru  $\Delta$  względem punktu  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m)$  jest własnością o tyle jeszcze ciekawą, że utrzymuje się ona nawet wtedy, gdy za  $D$  bę-

dziemy przyjmować zbiory o kształcie bardziej ogólnym, np. zbiory wypukłe lub gwiazdy.

**Definicja.** Zbiór  $D$  nazywamy gwiazdą o cesze co najmniej  $\lambda > 0$  względem punktu  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m, \hat{y}_1 \dots \hat{y}_n)$ , jeżeli:

1. Zawarty jest w pewnej kuli otwartej o promieniu  $R$  i środku w punkcie  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m, \hat{y}_1 \dots \hat{y}_n)$ .

2. Zawiera pewną kulę otwartą o promieniu  $r$  i środku w punkcie  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m, \hat{y}_1 \dots \hat{y}_n)$ .

3. Zawiera każdy odcinek łączący dowolny punkt kuli wewnętrznej z dowolnym punktem należącym do zbioru  $D$ .

$$4. \frac{r}{R} \geq \lambda.$$

Oczywiście każdy zbiór ograniczony wypukły zawierający wewnątrz punkt  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m, \hat{y}_1 \dots \hat{y}_n)$  jest gwiazdą względem tego punktu.

Wystarczy zatem dla dowodu całej wypowiedzianej wyżej tezy udowodnić następujące twierdzenie dotyczące gwiazd:

**Twierdzenie.** Jeżeli funkcje  $f_1 \dots f_n$  są określone i klasy  $C^1$  w otoczeniu punktu  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m)$  oraz liczba  $\lambda$  spełnia nierówności  $1 > \lambda > 0$ , wtedy istnieje taka liczba  $\delta > 0$ , że zakres  $x$ -owy warunku (1)

$$y_i = f_i(x_1 \dots x_m) \quad i = 1, \dots, n,$$

zacieśnionego do zbioru będącego gwiazdą o cesze co najmniej  $\lambda$  względem punktu  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m, \hat{y}_1 \dots \hat{y}_n)$  i zawartego w kuli o promieniu  $\leq \delta$  oraz środku w punkcie  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m, \hat{y}_1 \dots \hat{y}_n)$  jest zbiorem gwiazdzistym względem punktu  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m)$ .

**Dowód.** Dla uproszczenia zapisu założę dodatkowo, że

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= 0 & i &= 1, \dots, m, \\ f_j(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m) &= 0 & j &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

oraz wprowadzę symbolikę wektorową

$$\begin{aligned} \vec{X} &= (x_1 \dots x_m) & \vec{Y} &= (y_1, \dots, y_n) & [\vec{X}, \vec{Y}] &= (x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) \\ \vec{0} &= (0 \dots 0) \text{ } m \text{ zer} \\ \vec{F}(\vec{X}) &= [f_1(x_1 \dots x_m) \dots f_n(x_1, \dots, x_m)] \end{aligned} \quad (3)$$

$|\vec{A}|$  – moduł wektora  $\vec{A}$   $m$  wymiarowego,

$|\vec{A}, \vec{B}|$  – moduł wektora  $[\vec{A}, \vec{B}]$   $n+m$  wymiarowego.

Założenia (2) nie zmniejszają ogólności twierdzenia, widać bowiem jasno, iż gwiazdzistość jest niezmiennikiem względem translacji.

W myśl założenia i umowy (2) transformacja  $\vec{F}$  jest określona i klasy  $C^1$  wewnątrz kuli  $|\vec{X}| < h$ , gdzie  $h$  jest pewną liczbą dodatnią.

Dowiodę teraz, że istnieje liczba  $0 < \delta \leq h$  taka, że dla wszystkich punktów  $0 < |\vec{X}| < \delta$  oraz liczb  $0 < \vartheta < 1$  spełniona jest nierówność

$$s(\vartheta \vec{X}) = \frac{|\vec{F}(\vartheta \vec{X}) - \vartheta \vec{F}(\vec{X})|}{(1-\vartheta)|\vec{X}, \vec{F}(\vec{X})|} < \lambda. \quad (4)$$

Istotnie, stosując do identyczności

$$\vec{F}(\vartheta \vec{X}) - \vartheta \vec{F}(\vec{X}) = (1-\vartheta)[\vec{F}(\vec{X}) - \vec{F}(\vec{0})] - [\vec{F}(\vec{X}) - \vec{F}(\vartheta \vec{X})]$$

twierdzenie o przyrostach skończonych, otrzymujemy

$$\vec{F}(\vartheta \vec{X}) - \vartheta \vec{F}(\vec{X}) = (1-\vartheta)\vec{X} \cdot \text{grad } \vec{F}(\vartheta_1 \vec{X}) - (1-\vartheta)\vec{X} \cdot \text{grad } \vec{F}(\vartheta_2 \vec{X}), \quad ^1)$$

gdzie  $0 < \vartheta_i < 1 \quad i=1, 2$ .

Stąd po podstawieniu do (4)

$$s(\vartheta \vec{X}) = \frac{|\vec{X} \cdot [\text{grad } \vec{F}(\vartheta_1 \vec{X}) - \text{grad } \vec{F}(\vartheta_2 \vec{X})]|}{|\vec{X}, \vec{F}(\vec{X})|},$$

a dalej korzystając z nierówności  $0 < |\vec{X}| \leq |\vec{X}, \vec{F}(\vec{X})|$  mamy

$$s(\vartheta \vec{X}) \leq |\text{wersor } \vec{X} \cdot [\text{grad } \vec{F}(\vartheta_1 \vec{X}) - \text{grad } \vec{F}(\vartheta_2 \vec{X})]|.$$

Ponieważ  $|\text{wersor } \vec{X}|$  jest ograniczony, a pochodne składowych transformacji  $\vec{F}$  są ciągłe, więc skoro tylko moduł  $\vec{X}$  jest dostatecznie mały (a zatem i punkty  $[\vartheta_1 \vec{X}]$ ,  $[\vartheta_2 \vec{X}]$  są bliskie), moduł różnicy  $\text{Grad } \vec{F}(\vartheta_1 \vec{X}) - \text{grad } (\vartheta_2 \vec{X})$ , a z kolei i całe wyrażenie

$$|\text{wersor } \vec{X} \cdot [\text{grad } \vec{F}(\vartheta_1 \vec{X}) - \text{grad } \vec{F}(\vartheta_2 \vec{X})]|$$

jest dowolnie małe. A więc odpowiednie  $\delta$  można dobrać.

Dla ukończenia dowodu wystarczy wykazać, że skoro punkt  $[\vec{X}, \vec{F}(\vec{X})]$  należy do gwiazdy  $D$  zawartej w kuli otwartej o promieniu  $\leq \delta$  i cesze co najmniej  $\lambda$ , to punkt  $\vartheta \vec{X}, \vec{F}(\vartheta \vec{X})$  również do niej należy.

Można założyć ponadto, iż  $0 < |\vec{X}|$ , jeżeli bowiem  $\vec{X} = \vec{0}$ , to także i  $\vartheta \vec{X} = \vec{0}$ , a więc punkt  $[\vartheta \vec{X}, \vec{F}(\vartheta \vec{X})]$  jako identyczny z punktem  $[\vec{0}, \vec{F}(\vec{0})]$  oczywiście do  $D$  należy.

Weźmy teraz pod uwagę równanie promienia wychodzącego z punktu  $[\vec{X}, \vec{F}(\vec{X})]$  i przechodzącego przez punkt  $[\vartheta \vec{X}, \vec{F}(\vartheta \vec{X})]$

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \vec{X} + t(\vartheta - 1)\vec{X} \\ \vec{V} &= \vec{F}(\vec{X}) + t[\vec{F}(\vartheta \vec{X}) - \vec{F}(\vec{X})] \end{aligned} \quad 0 \leq t.$$

<sup>1)</sup> Kropka oznacza mnożenie skalarne.

Punkt  $[\vartheta \vec{X}, \vec{F}(\vartheta \vec{X})]$  leży na odcinku łączącym punkty  $[\vec{X}, \vec{F}(\vec{X})]$  i  $[\vec{0}, \frac{\vec{F}(\vartheta \vec{X}) - \vartheta \vec{F}(\vec{X})}{1 - \vartheta}]$ , gdyż pierwszy z tych punktów otrzymujemy dla  $t=1$ , drugi dla  $t=0$ , a trzeci dla  $t = \frac{1}{1 - \vartheta} > 1$ .

Moduł tego ostatniego punktu spełnia w myśl (4) oraz definicji liczby  $\lambda$  następujące nierówność:

$$\left| \vec{0}, \frac{\vec{F}(\vartheta \vec{X}) - \vartheta \vec{F}(\vec{X})}{1 - \vartheta} \right| = \left| \frac{\vec{F}(\vartheta \vec{X}) - \vartheta \vec{F}(\vec{X})}{1 - \vartheta} \right| < \lambda |\vec{X}, \vec{F}(\vec{X})| \leq \lambda R \leq r,$$

gdzie  $r$  i  $R$  oznaczają promienie stosownych kul o środkach w punkcie  $[\vec{0}, \vec{F}(\vec{0})]$  zawartej i zawierającej gwiazdę  $D$ .

Ostatecznie, ponieważ zbiór  $D$  jest gwiazdą, punkt  $[\vartheta \vec{X}, \vec{F}(\vartheta \vec{X})]$  należy do zbioru  $D$  — co kończy dowód.

Zastosowanie w teorii funkcji uwikłanych:

Jak wiadomo warunek

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

przy pewnych założeniach w odniesieniu do funkcji  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  jest — po zacieśnieniu do kuli  $K$  o środku w punkcie  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m, \hat{y}_1 \dots \hat{y}_n)$  i o promieniu dostatecznie małym — równoważny warunkowi postaci (1).

Stąd wynika, że jeżeli warunek (5) zacieśnimy do gwiazdy  $D$  zbudowanej na podstawie twierdzenia dla warunku (1) i zawartej w kuli  $K$ , to zbiór określoności funkcji uwikłanych wyznaczonych z tak zacieśnionego warunku (5) jest gwiazdzisty względem punktu  $(\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m, \hat{y}_1 \dots \hat{y}_n)$ .

Katedra Analizy Matematycznej UJ

Otrzymano 20 maja 1954 r.

#### РЕЗЮМЕ

*Звездообразность области существования системы неявных функций*

В курсе математического анализа доказывается что условия

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - \hat{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} < r$$

при некоторых предположениях относительно функции

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \quad i = 1, \dots, n$$

и при соответственно малом  $r$  определяют систему функции в множестве  $E$  в котором точка  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$  есть внутренняя. Принимая  $r$  достаточно малым можем получить ещё один эффект: множество  $E$  будет содержать всякий отрезок соединяющий точку  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$  с любой другой точкой принадлежащей  $E$ .

Настоящая статья содержит обобщение и доказательство вышеуказанного свойства неявных функций.

## SUMMARY

*A Proof that the Domain of Existence of the Implicit Functions is Star-shaped*

According to well known theorem the equations

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad i = 1, \dots, n,$$

considered in the sphere

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - \hat{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} < r$$

define (under some adequate assumptions) a system of implicit functions

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_m) \quad i = 1, \dots, n,$$

which are determined on a certain set  $E$ , the point  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m)$  being the interior point of  $E$ .

For  $r$  sufficiently small the following property of  $E$  can be proved: all points of a segment joining  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m)$  with an arbitrary point of  $E$  belong to  $E$ .

The paper deals with a generalization of these property.