ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

Nr CXXXI PRACE MATEMATYCZNE. ZESZYT 11 1966

Андрей Шибяк

О приведению внешних форм

В этой статьи мы дадим геометрическое истолкование введенных Э. Картаном основных понятий алгебры внешних форм, а именно понятий алгебраического дифференцирования, сокращения числа переменных и приведения квадратичных внешних форм к каноническому виду [1], [2]. Мы отправляемся из современного определения внешней формы степени p как кососимметрического функционала

$$\omega\colon \underbrace{E\times \ldots \times E}_{p} \to K\,,$$

где E центроаффинное (вещественное или комплексное) векторное пространство n измерений, K поле (вещественных или, соответственно, комплексных) чисел [3]. В дальнейшем мы будем рассматривать формы степени не меньше 2.

Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ фиксированная система линейно независимых векторов в пространстве E. Рассмотрим систему линейных относительно X форм

$$\omega(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_{p-1}}, X)\,, \quad 1 \leqslant i_1, \ldots, i_p \leqslant n\,. \tag{1}$$

Эту систему функций мы назовём *ассоциированной к форме* ω. Систему уравнений получаемую приравниванием к нулю всех функций (1) мы назовём *ассоциированной системой уравнений*. Число независимых среди указанных $\binom{n}{p-1}$ форм мы назовём *рангом* формы ω.

Пусть r ранг нашей формы и $X_{r+1}, \ldots, X_n$ линейно независимые векторы, для которых все формы сопряжённой системы обращаются в нуль. Мы разбиваем пространство на прямую сумму двух пространств: $T = T_\omega + T_0$, где T_0 $n-r$ мерное пространство, определяемое векторами $X_{r+1}, \ldots, X_n$ и T_ω r мерное, дополнительное к нему в T. Мы будем обозначать штрихом $'$ операцию проектирования $T \to T_\omega$. Целесообразно назвать T_0 *нулевым пространством* формы ω и T_ω её *естественным пространством.*

Теорема 1. *Справедливо тождество*

$$\omega(X_1, \ldots, X_p) = \omega(X_1', \ldots, X_p')\,.$$

Доказательство: Допустим противное. Тогда существует вектор $Z \in T_0$ и векторы $\underset{1}{Z}, \ldots, \underset{p-1}{Z} \in T$ такие, что

$$\omega(\underset{1}{Z}, \ldots, \underset{p-1}{Z}, Z) \neq 0 .$$

Мы представим все $\underset{k}{Z}$ как линейные комбинации выше указанных векторов Y_i, $\underset{k}{Z} = \underset{k}{\xi^i} Y_i$. Тогда имеем

$$\omega(\underset{1}{Z}, \ldots, \underset{p-1}{Z}, Z) = \omega(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_{p-1}}, Z)\zeta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \zeta^{i_{p-1}} .$$

Но так как $Z \in T_0$, все $\omega(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_{p-1}}, Z)$ нули, и получилось противоречие.

Следствие: *Всякая форма степени p и ранга r может быть представлена при подходящем выборе базиса как форма в r мерном пространстве.*

Действительно, в качестве этого базиса может быть взята любая совокупность r линейно независимых векторов $X_1, \ldots, X_r \in T_\omega$. Тогда мы имеем

$$\omega(\underset{1}{V}, \ldots, \underset{p}{V}) = a_{i_1 \ldots i_p} \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_p} ,$$

где

$$a_{i_1 \ldots i_p} = \omega(X_{i_1}, \ldots, X_{i_p}) , \qquad V_h = \underset{h}{\xi^l} X_l$$

и все i_k независимо пробегают от 1 до r.

Теперь следует высказать связь между выше высказанным методом приведения и методом созданным Э. Картаном [1]. Если мы разложим вектор X во формах (1) по векторам Y_i, т. е. $X = x^i Y_i$, тогда мы имеем тождество

$$(2) \qquad \omega(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_{p-1}}, X) = \omega(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_{p-1}}, Y_{i_p}) x^{i_p} .$$

Коэффициенты в правой части (2) совпадают с теми, которые получатся, если форму ω разложенную по векторам Y_i продифференцировать алгебраически $p-1$ раз, т. е. полагая $\underset{a}{V} = \underset{a}{x^k} Y_k$ мы имеем

$$\omega(\underset{1}{V}, \ldots, \underset{p}{V}) = \omega(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_p}) x^{i_1} \wedge \ldots \wedge x^{i_p}$$

и

$$\omega(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_{p-1}}, Y_{i_p}) x^{i_p} = \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{i_{p-1}} \ldots \partial x^{i_1}} \left(\omega(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_p}) x^{i_1} \wedge \ldots \wedge x^{i_p}\right) ,$$

а это и показывает эквивалентность системы (1) с ассоциированной по Картану. Отсюда уже вытекает непосредственно эквивалентность определений ранга и проведения формы к минимальному числу переменных.

Сейчас мы рассмотрим *внешнюю форму второй степени.* Так как матрица ассоциированной системы кососимметрическая, ранг формы ω чётен, скажем $r = 2b$.

Теорема 2. *Пусть в пространстве T_ω задан вектор $X_1 \neq 0$. Тогда можно к нему прибавить $b-1$ (но не больше) векторов $X_2, \ldots, X_b$ подчинённых условиям*

$$\omega(X_i, X_j) = 0 \qquad i, j = 1, \ldots, b$$

и взаимно линейно независимых.

Доказательство: Все решения уравнения $\omega(x_1, x) = 0$ линейно независимые от X_1 образуют $2b-2$ мерное подпространство $T^2 \subset T_\omega$. Мы возьмём в качестве X_2 произвольный ненулевой вектор из T_2. Снова мы рассматриваем подпространство T^3, образованное решениями уравнений $\omega(X_2, X) = 0$ линейно независимыми от X_2, и так дальше. С каждым таким шагом получается подпространство T_i размерность которого на два меньше чем T_{i-1}. Таким образом в этих подпространствах определяем векторы $X^2, \ldots, X^b$ и из построения следует, что все они обладают указанными свойствами.

Если бы мы допустили, что существует набор $b+1$ таких векторов, тогда немедленно придём к заключению, что ранг нашей формы меньше чем $2b$.

Пусть $X_1, \ldots, X_b$ система линейно независимых векторов таких, что $\omega(X_i, X_k) = 0$ для $i, k = 1, \ldots, b$ и H подпространство, определённое ими. Мы предполагаем, что в T_ω задано проектирование p: $T_\omega \to H$ на всё H. Тогда существует единственное разбиение T_ω на прямую сумму $T_\omega = H \oplus F$ где F тоже b мерное подпространство, не имеющее с H общего элемента, кроме нуля и $pF = 0$. Тогда верна

Теорема 3. *При заданных p и $X_1, \ldots, X_b$ удовлетворяющих условию* (3) *существует в F единственный базис $Y_1, \ldots, Y_b$, обладающий тем свойством, что*

$$\omega(X_i, Y_k) = \delta_{ik}, \quad \omega(Y_i, Y_k) = 0 .$$

Доказательство по индукции. Если $b = 1$, тогда мы определим Y_1 из уравнений

$$\omega(X_1, Y_1) = 1, \quad pY_1 = 0 .$$

Это кронекерова система двух линейных уравнений в двумерном пространстве. Следовательно Y_1 определено однозначно. Из первого из этих уравнений следует, что X_1 и Y_1 линейно независимы.

Пусть теперь наша теорема верна для $b = k$. Мы докажем её для $b = k+1$. Y_{k+1} определяется системой уравнений

$$\omega(X_i, Y_{k+1}) = \delta_{i,k+1}, \quad pY_{k+1} = 0 .$$

Эти условия равносильны системе $2k+2$ уравнений в $2k+2$ пространстве T_ω. Следовательно, система кронекерова и ей решение определяется однозначно. Мы рассмотрим систему уравнений

$$\omega(X_{k+1}, X) = 0, \quad \omega(X, Y_{k+1}) = 0 .$$

Решения этой системы образуют $2k$ мерное подпространство $T' \subset T$. Векторы $X_1, \ldots, X_k$ принадлежат T', но X_{k+1} и Y_{k+1} не принадлежат ему. Пусть E' подпространство, определяемое векторами $X_1, \ldots, X_k$, F' дополнительное к нему, т. е. такое, что $E' \oplus F' = T'$, $E' \cap F' = 0$, $pF' = 0$. Пусть T'' подпространство, определяемое векторами X_{k+1} и Y_{k+1}. Тогда мы имеем разбиение $T_\omega = T' \oplus T''$.

Взяв произвольные векторы $\underset{1}{Z}, \underset{2}{Z}$, мы разложим их: $\underset{a}{Z} = \underset{a}{Z'} + \underset{a}{Z''}$, где $\underset{a}{Z'} \in T'$, $\underset{a}{Z''} \in T''$. Тогда мы имеем

$$\omega(Z_1, Z_2) = \omega(\underset{1}{Z'}, \underset{2}{Z'}) + \omega(\underset{1}{Z''}, \underset{2}{Z''}),$$

ибо

$$\omega(\underset{1}{Z'}, \underset{2}{Z''}) = \omega(\underset{1}{Z''}, \underset{2}{Z'}) = 0\,.$$

Таким образом форма $\omega'(Z_1, Z_2) \overset{\mathrm{df}}{=} \omega(\underset{1}{Z'}, \underset{2}{Z'})$ как форма в $2k$ мерном пространстве имеет ранг $2k$ и к ней применимо индукционное предположение. Теорема существования доказана. Однозначность следует из построения, так как каждый шаг построения был определён условиями теоремы.

Следствие 2. *В построенном по теореме* 2 *базисе* $X_1, \ldots, X_b$, $Y_1, \ldots, Y_b$ *внешняя квадратичная форма* ω *приобретает вид*

$$\omega(\underset{1}{Z}, \underset{2}{Z}) = \sum_{i=1}^{b} x^i \wedge y^i, \qquad \text{где} \qquad \underset{a}{Z} = \underset{a}{x^i} X_i + y^i_a Y_i\,.$$

Здесь X_i задаются с большим произволом, Y_i определяются ими однозначно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Cartan, *Les systèmes différentielles extérieurs et leurs applications géométriques*, Actualités scient. et ind., n⁰ 994, Paris 1945.

[2] С. П. Фиников, *Метод внешних форм Картана*, Москва—Ленинград 1948.

[3] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, New York-London-Sidney 1963.