ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
Nr CXXXI PRACE MATEMATYCZNE. ZESZYT 11 1966

Andrzej Lasota

Sur l'existence et l'unicité des solutions du problème aux limites de Nicoletti pour un système d'équations différentielles ordinaires

Nous allons considérer le système d'équations différentielles

$$x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_m) \quad i = 1, \ldots, m; \; a \leqslant t \leqslant b \tag{0.1}$$

assujetties aux conditions aux limites suivantes

$$x_i(t_i) = r \quad i = 1, \ldots, m \tag{0.2}$$

où les points $t_1, \ldots, t_m$ appartiennent à l'intervalle $[a, b]$ et les nombres $r_1, \ldots, r_m$ sont arbitraires. Le problème (0.1), (0.2) a été étudié déjà en 1897 par O. Nicoletti qui, en utilisant la méthode des approximations successives, a démontré l'existence et l'unicité d'une solution de ce problème pour les seconds membres de (0.1) lipschitziens et pour l'intervalle $[a, b]$ suffisamment petit. La longue liste d'auteurs qui amélioraient les résultats de O. Nicoletti est à trouver dans le travail de R. Conti [1]. Nous rappelons maintenant les théorèmes de M. Švec et de V. P. Skripnik [5], [4].

Supposons que les fonctions réelles $f_1(t, p_i, \ldots, p_m)$ soient définies dans l'ensemble

$$D_m^-\colon\; a \leqslant t \leqslant b, \quad -\infty < p_i < +\infty \quad i = 1, \ldots, m$$

et qu'elles satisfassent aux conditions de Lipschitz

$$|f_i(t, q_1, \ldots, q_m) - f_i(t, p_1, \ldots, p_m)| \leqslant \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)|q_j - p_j| \quad i = 1, \ldots, m. \tag{0.3}$$

Soit (c_{ij}) $(i, j = 1, \ldots, m)$ une matrice carrée dont les éléments sont non négatives; la plus grande valeur propre de (c_{ij}), c'est-à-dire la plus grande racine réelle de l'équation

$$\mathrm{Det}(\lambda\delta_{ij} - c_{ij}) = 0$$

est désignée par $\lambda(c_{ij})$. En vertu des théorèmes bien connus de Frobenius $\lambda(c_{ij})$ existe et la fonction $(c_{ij})\to\lambda(c_{ij})$ est croissante par rapport à c_{ij}.

Si les fonctions f_i satisfont aux conditions (0.3) et si l'on a

$$\lambda\big(\max_{a\leqslant t\leqslant b} a_{ij}(t)\big) < \frac{1}{b-a} \tag{0.4}$$

le problème (0.1), (0.2) admet au plus une solution. C'est le théorème d'unicité de M. Švec. V. P. Skripnik a démontré non seulement l'unicité mais aussi l'existence des solutions du problème (0.1), (0.2) en admettant l'hypothèse que les fonctions f_i définies et continues dans D_m (ou dans une partie de D_m suffisamment grande) satisfont aux inégalités (0.3) et que

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b} \sum_{i=1}^{m} \Big|\int_{t_i}^{t} \big(\max_j a_{ij}(t)\big)\,dt\Big| < 1. \tag{0.5}$$

La présente note se compose de quatre parties. Dans la première nous allons énoncer des théorèmes concernant le question d'unicité et d'existence des solutions du problème (0.1) (0.2) qui généralisent les résultats mentionnés de M. Švec et de V. P. Skripnik. Les démonstrations de nos théorèmes seront données dans les deux parties suivantes. Enfin, dans la quatrième partie, à titre d'exemple, nous allons envisager un problème aux limites pour l'équation différentielle du troisième ordre.

1. Dans toute la suite les solutions des équations différentielles sont traitées au sens de Carathéodory. On dit qu'une suite de fonctions $(x_1, \ldots, x_m)$ est dans l'intervalle $[a, b]$ une solution du système (0.1), si les fonctions x_i sont absolument continues dans $[a, b]$ et si les relations

$$x_i'(t) = f_i\big(t, x_1(t), \ldots, x_m(t)\big) \qquad i = 1, \ldots, m$$

sont vérifiées presque partout dans $[a, b]$. Nous dirons qu'une fonction réelle $f(t, p_1, \ldots, p_m)$ définie dans D_m satisfait aux conditions de Carathéodory, si elle est continue par rapport à l'ensemble de variables $p_1, \ldots, p_m$ pour tout $t\in[a, b]$ et mesurable par rapport à t quels que soient les $p_1, \ldots, p_m$.

Comme pour la question d'existence des solutions du problème (0.1), (0.2), ce n'est pas la régularité des fonctions f_i qui s'avère essentielle mais l'ordre de croissance par rapport aux variables $p_1, \ldots, p_m$, nous allons à côté des inégalités (0.3) considérer les conditions suivantes

$$|f_i(t, p_1, \ldots, p_m)| \leqslant \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)|p_j| + b_i(t, p_1, \ldots, p_m) \tag{1.1}$$

$$a_{ij}\geqslant 0,\ b_i\geqslant 0; \qquad i, j = 1, \ldots, m$$

où

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_a^b \sup_{|p|\leqslant n} b_i(t, p_1, \ldots, p_m)\,dt = 0 \qquad i = 1, \ldots, m; \qquad |p| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} p_j^2}. \tag{1.2}$$

Théorème 1.1. *Si les fonctions* $f_i(t, p_1, \ldots, p_m)$ *satisfont dans l'ensemble* D_m *aux conditions* (0.3) *où* $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ *sont sommables dans* $[a, b]$ *et telles que l'on a*

$$(1.3)\qquad \lambda(A_{ij}) < 1\,, \qquad A_{ij} = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_{t_i}^{t} a_{ij}(s)\,ds\right|,$$

le problème (0.1), (0.2) *admet au plus une solution.*

Théorème 1.2. *Si les fonctions* $f_i(t, p_1, \ldots, p_m)$ *satisfont dans* D_m *aux conditions de Carathéodory et aux conditions* (1.1) *où* $a_{ij}(t)$ *et* $\sup\limits_{|p|\leqslant n} b_i(t, p_1, \ldots, p_m)$ $(i, j = 1, \ldots, m;\ n = 1, 2, \ldots)$ *sont sommables dans* $[a, b]$ *et telles que l'on a* (1.2), (1.3), *il existe au moins une solution du problème* (0.1), (0.2).

En vertu du théorème 1.1 et 1.2 on peut facilement obtenir les conditions assurant à la fois l'existence et l'unicité des solutions du problème (0.1), (0.2). Il suffit d'admettre que les fonctions $f_i(t, p_1, \ldots, p_m)$ satisfont aux conditions de Carathéodory, aux conditions (0.3), (1.3) et que les fonctions $f_i(t, 0, \ldots, 0)$ sont sommables dans $[a, b]$.

2. Considérons le système d'inégalités différentielles

$$(2.1)\qquad |x_i'(t)| \leqslant \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)\,x_j(t) \qquad i = 1, \ldots, m;\ a \leqslant t \leqslant b$$

et les conditions aux limites homogènes

$$(2.2)\qquad x_i(t_i) = 0 \qquad i = 1, \ldots, m\,.$$

On a le suivant

Lemme 2.1. *Si les coefficients* $a_{ij}(t)$ *sont sommables dans* $[a, b]$ *et si l'on a* (1.3), *le problème* (2.1), (2.2) *n'admet aucune solution absolument continue sauf la solution identiquement nulle.*

Démonstration. Supposons que $(x_1, \ldots, x_m)$ soit une solution de (2.1), (2.2) non identiquement nulle. En posant

$$\mu_i = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x_i(t)| \qquad i = 1, \ldots, m$$

on obtient

$$\mu_i = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_{t_i}^{t} x_i'(s)\,ds\right| \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}\sum_{j=1}^{m}\left|\int_{t_i}^{t} a_{ij}(s)\,|x_j(s)|\,ds\right|$$

d'où

$$\mu_i \leqslant \sum_{j=1}^{m} A_{ij}\,\mu_j$$

Il existe donc des nombres $\theta_i \in [0, 1]$ tels que

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{m} \theta_i A_{ij}\,\mu_j\,.$$

Il en vient que 1 est la valeur propre de la matrice $(\theta_i A_{ij})$ et, par conséquent, en vertu du théorème de Frobenius la plus grande valeur propre $\lambda(A_{ij})$ de la matrice (A_{ij}) satisfait à l'inégalité

$$\lambda(A_{ij}) \geqslant \lambda(\theta_i A_{ij}) \geqslant 1$$

ce qui est en contradiction avec (1.3).

Du lemme 2.1. il résulte immédiatement le théorème 1.1. En effet, la différence $(x_i) = (x_i^1 - x_i^2)$ de deux solutions (x_i^1) et (x_i^2) $(i = 1, \ldots, m)$ du problème (0.1), (0.2) vérifie, vu (0.3), les conditions (2.1), (2.2) et d'après le lemme 2.1 elle est identiquement nulle.

3. La démonstration du théorème 1.2 est en peu plus compliquée. Elle s'appuie sur un théorème général concernant des équations homogènes aux contingents [2] que nous allons rappeler.

Soit R^m l'espace euclidien à m dimensions. Par $|p|$ et $\delta(p, A)$ $(p \in R^m, A \subset R^m)$ nous désignons la norme euclidienne de p et la distance du point p à l'ensemble A respectivement. L'ensemble de toutes les parties non vides, convexes et fermées de R^m est noté $\mathrm{cf}(R^m)$. Une application F de R^m dans $\mathrm{cf}(R^m)$ est dite continue, si elle est continue dans la métrique de Hausdorff, c'est-à-dire si la condition $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p_0$ entraîne

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}\big(F(p_n), F(p_0)\big) = 0$$

où

$$\mathrm{dist}(A, B) = \max\big(\sup_{q\in B}\delta(q, A), \sup_{q\in A}\delta(q, B)\big) \qquad A, B \subset R^m.$$

Une application F de $[a, b]$ dans $\mathrm{cf}(R^m)$ est dite mesurable [3], si pour tout fermé $A \subset R^m$ l'ensemble de tous les points t pour lesquels l'intersection $A \cap F(t)$ n'est pas vide est mesurable. Comme d'habitude on dit qu'une fonction $F(t, p)$ (resp: $f(t, p)$) définie dans $[a, b] \times R^m$ à valeurs dans $\mathrm{cf}(R^m)$ (resp: R^m) satisfait aux conditions de Carathéodory, si pour tout $t \in [a, b]$ elle est continue par rapport à p et pour tout $p \in R^m$ mesurable par rapport à t.

L'espace des fonctions $x(t)$ à valeurs dans R^m définies et continues dans $[a, b]$ muni de la norme habituelle $\|x\| = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$ est désigné par $C^m_{[a,b]}$.

Admettons les hypothèses suivantes:

1° $F(t, p)$ est une fonction définie dans $[a, b]\times R^m$ prenant ses valeurs dans $\mathrm{cf}(R^m)$ et satisfaisant aux conditions de Carathéodory. Pour tout $t \in [a, b]$ $F(t, p)$ est homogène par rapport à p $\big(F(t, \alpha p) = \alpha F(t, p)$; p R^m, $\alpha \in R^1\big)$ et la fonction numérique

$$\varphi(t) = \sup_{|p|=1}|F(t, p)|, \qquad |F(t, p)| = \sup_{q\in F(t,p)}|q|$$

est sommable dans $[a, b]$.

2° $f(t,p)$ est une fonction définie dans $[a,b]\times R^m$ prenant ses valeurs dans R^m, satisfaisant aux conditions de Carathéodory et telle que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_a^b \sup_{|p|\leqslant n}\delta\big(f(t,p),F(t,p)\big)\,dt=0\,.$$

3° N est une application de $C^m_{[a,b]}$ dans R^m continue et homogène ($N(ax) = aN(x)$; $x\in C^m_{[a,b]}$, $a\in R^1$).

Théorème 3.1. *Si les fonctions F, f, N satisfont aux conditions* 1°, 2°, 3° *et si le problème*

$$x'(t)\in F\big(t,x(t)\big)\qquad a\leqslant t\leqslant b \tag{3.1}$$

$$N(x)=0 \tag{3.2}$$

n'admet aucune solution absolument continue sauf la solution nulle, il existe au moins une solution absolument continue du problème

$$x'(t)=f\big(t,x(t)\big)\qquad a\leqslant t\leqslant b\,^{1} \tag{3.3}$$

$$N(x)=r \tag{3.4}$$

quelque soit $r\in R^m$.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 2.1. Posons

$$F_0(t,p)=\Big\{q\in R^m\colon\ |q_i|\leqslant\sum_{j=1}^m a_{ij}(t)|p_j|\Big\}\qquad q=(q_1,\dots,q_m),\ p=(p_1,\dots,p_m)$$

$$N_0(x)=\big(x_1(t_1),\dots,x_m(t_m)\big)\qquad x\in C^m_{[a,b]}\,.$$

Il est facile de prouver que F_0 applique $[a,b]\times R^m$ dans $\mathrm{cf}(R^m)$, satisfait aux conditions de Carathéodory et est homogène. De plus, en vertu du lemme 2.1 il vient que le problème

$$x'(t)\in F_0\big(t,x(t)\big)\qquad (a\leqslant t\leqslant b),\ N_0(x)=0$$

admet seulement la solution nulle. D'après (1.1) la fonction vectorielle $f=(f_1,\dots,f_m)$ satisfait aux conditions

$$\delta\big(f(t,p),F_0(t,p)\big)\leqslant\sum_{j=1}^m b_j(t,p)$$

d'où, vu (1.2), on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_a^b\sup_{|p|\leqslant n}\delta\big(f(t,p),F_0(t,p)\big)\,dt\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^m\int_a^b\sup_{|p|\leqslant n}b_j(t,p)\,dt\,.$$

---

[1] Nous admettons come d'habitude que les relations (3.1), (3.3) sont vérifiées presque partout dans l'intervalle $[a,b]$.

Donc du théorème 3.1 il résulte que le problème

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big) \qquad a \leqslant t \leqslant b\,, \qquad N_0(x) = r \qquad r = (r_1, \ldots, r_m)$$

admet une solution au moins ce qui achève la démonstration.

4. A titre d'exemple nous allons considérer l'équation différentielle du troisième ordre

$$x''' + r(t)x = g(t, x, x', x'') \qquad a \leqslant t \leqslant b \tag{4.1}$$

et les conditions aux limites.

$$x'(a) = r_1, \quad x''(a) = r_2, \quad x''(b) = r_3\,. \tag{4.2}$$

En utilisant l'évaluation (0.5) V. P. Skripnik a démontré que dans le cas où $g = 0$ et la fonction continue $r(t)$ satisfait à l'inégalité

$$2\int_a^b \left|\frac{1}{b-a} + r(t)\right| dt + \frac{3}{2}(b-a) < 1$$ [1]

le problème (4.1), (4.2) admet exactement une solution (voir [4] th. 2.1).

En vertu de nos résultats concernant le problème (0,1), (0.2) on peut obtenir un théorème un peu plus général, à savoir le suivant

Théorème 4.1. *Soit $r(t)$ une fonction définie et mesurable dans $[a, b]$ et soit $g(t, p_1, p_2, p_3)$ une fonction satisfaisant dans l'ensemble*

$$D_3: \qquad a \leqslant t \leqslant b\,, \qquad -\infty < p_i < +\infty \qquad i = 1, 2, 3$$

aux conditions de Carathéodory. Si l'on a

$$2\int_a^b \left|\frac{1}{b-a} + r(t)\right| dt + \frac{1}{2}(b-a)^2 < 1\,, \tag{4.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_a^b \sup_{|p|\leqslant n} g(t, p_1, p_2, p_3)\, dt = 0 \qquad |p| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\,, \tag{4.4}$$

le problème (4.1), (4.2) *admet au moins une solution.*

De plus, dans le cas où $g(t, p_1, p_2, p_3)$ ne dépend pas de p_1, p_2, p_3 cette solution est unique.

Démonstration. En posant (suivant V. P. Skripnik)

$$y_1 = x'' - \frac{t-a}{b-a}x\,, \qquad y_2 = x'\,, \qquad y_3 = x'' + \frac{b-t}{b-a}x$$

---

[1] Il est à noter que dans le travail cité de V. P. Skripnik on a omis le nombre 2 devant le signe de l'intégrale.

on peut ramaner l'équation (4.1) et les conditions (4.2) au système

$$
\begin{aligned}
y_1' &= \left(\frac{1}{b-a}+r\right)y_1 - \frac{t-a}{b-a}y_2 - \left(\frac{1}{b-a}+r\right)y_3 + \bar{g}(t, y_1, y_2, y_3) \\
y_2' &= \frac{b-t}{b-a}y_1 + \frac{t-a}{b-a}y_3 \qquad\qquad (4.5) \\
y_3' &= \left(\frac{1}{b-a}+r\right)y_1 - \frac{b-t}{b-a}y_2 - \left(\frac{1}{b-a}+r\right)y_3 + \bar{g}(t, y_1, y_2, y_3)
\end{aligned}
$$

et aux conditions aux limites

$$y_1(a) = r_2, \qquad y_2(a) = r_1, \qquad y_3(b) = r_3$$

où la fonction $\bar{g}$ est donnée par la formule

$$\bar{g}(t, p_1, p_2, p_3) = g\left(t, p_3 - p_1, p_2, \frac{b-t}{b-a}p_1 + \frac{t-a}{b-a}p_3\right).$$

Les seconds membres du système (4.5) satisfont aux conditions (1.1) avec les coefficients

$$a_{11}(t) = a_{13}(t) = a_{31}(t) = a_{33}(t) = \frac{1}{b-a} + r(t)$$

$$a_{12}(t) = a_{23}(t) = \frac{t-a}{b-a}, \qquad a_{21}(t) = a_{32}(t) = \frac{b-t}{b-a}$$

$$b_1(t, p) = b_3(t, p) = g(t, p), \qquad b_2(t, p) = 0 \qquad p = (p_1, p_2, p_3).$$

De (4.4) et de l'inégalité

$$\sup_{|p|\leqslant n} b_i(t, p) \leqslant \sup_{|p|\leqslant n} |\bar{g}(t, p)| \leqslant \sup_{|p|\leqslant 2n} |g(t, p)| \qquad i = 1, 2, 3;\ n = 1, 2, \ldots$$

on tire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_a^b \sup_{|p|\leqslant n} b_i(t, p)\, dt = 0 \qquad i = 1, 2, 3.$$

Donc pour achever le démonstration il suffit de vérifier l'inégalité

$$\lambda\left(\int_a^b a_{ij}(t)\, dt\right) = \sqrt{\left(\int_a^b \left|\frac{1}{b-a}+r\right| dt\right)^2 + \frac{(b-a)^2}{2}} + \int_a^b \left|\frac{1}{b-a}+r\right| dt < 1.$$

qui est une conséquence immédiate de la condition (4.3).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Conti, *Problèmes linéaires pour les équations différentielles ordinaires*, Math. Nachr. 23 (1961), 161-178.

[2] A. Lasota, *Une généralisation du premier théorème de Fredholm et ses applications dans la théorie des équations différentielles ordinaires*, Ann. Polon. Math. 18 (1966), 65—77.

[3] A. Pliś, *Remark on measurable set-valued functions*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. des sci. math., astr. et phys., 9 (1961), 857-859.

[4] В. П. Скрипник, *Об одной краевой задаче и некоторых вопросах колеблимости решений*, Мат. Сборник 55 (1961), 449—472.

[5] M. Švec, *K problemu jednoznačnosti integralov systému linéarnych diferencialnych rovnic*, Matem.-fiz. sbornik Slov. Acad. Ved. 2 (1952), 3-22.