

Michał Lorens, Edward Siwek

Un théorème sur les pseudoobjets géométriques associés avec des objets géométriques linéaires et homogènes

1. Un objet géométrique différentiel dans un point fixe d'une variété différentiable à n dimensions peut être considéré (voir p. ex. [2]) comme une structure algébrique composée d'un ensemble $X \subset R^m$, appelé le fibre, et d'une opération $(A, x) \rightarrow A \cdot x$ des éléments A d'un sousgroupe G du groupe L_n^r sur les éléments x de X prenant ses valeurs dans X et satisfaisant pour tout $A, B \in G$ et $x \in X$ aux conditions:

$$(1) \quad A \cdot x \in X$$

$$(2) \quad B \cdot (A \cdot x) = (BA) \cdot x, \quad E \cdot x = x,$$

où E dénote l'unité du groupe G .

Une équivalence C (relation réflexive, symétrique et transitive) définie dans le fibre X et satisfaisant à la condition:

$$(3) \quad (x, y) \in C \Rightarrow (A \cdot x, A \cdot y) \in C \text{ pour tout } A \in G$$

s'appelle congruence pour l'objet géométrique X (nous désignons ici l'objet géométrique et son fibre par le même symbole). Toute congruence C pour l'objet géométrique X détermine un pseudoobjet géométrique associé avec l'objet X c'est-à-dire une structure composée de X/C comme le fibre et de l'opération: $(A, [x]) \rightarrow A \cdot [x]$, où $[x] \stackrel{\text{df}}{=} \{y \in X: (x, y) \in C\}$ et $A \cdot [x] \stackrel{\text{df}}{=} [A \cdot x]$, satisfaisant évidemment aux conditions de la forme (1) et (2). Donc le problème important de déterminer les pseudoobjets associés avec un objet géométrique donné X se réduit au problème de déterminer les congruences pour cet objet géométrique.

Nous considérons ce problème dans le cas particulier où:

1° $G = GL(n)$ c'est-à-dire le groupe G coïncide avec le groupe L_n^1 tout entier;

2° le fibre X prend la forme:

$$(4) \quad X = \left\{ x \in R^m : x \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\};$$

3° l'opération $(A, x) \rightarrow A \cdot x$ s'exprime par la formule:

$$A \cdot x = F(A)x,$$

où F dénote un homomorphisme du groupe $GL(n)$ dans le groupe $GL(m)$ et $F(A)x$ dénote le produit (au sens matriciel) de la matrice $F(A) \in GL(m)$ par la matrice:

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas l'objet géométrique (X, F) (qui est entièrement déterminé par l'homomorphisme F) est dit linéaire et homogène.

2. Dans le cas des objets linéaires et homogènes l'opération F peut être considéré comme l'homomorphisme du groupe $GL(n)$ dans le groupe des transformations linéaires et homogènes du fibre X de la forme (4) sur lui même et, par conséquent, la congruence C doit être une équivalence compatible, en vertu du (3), avec les transformations de la forme:

$$(5) \quad x' = Mx, \quad M \in GL(m)$$

appartenant à ce groupe. Il s'agit donc de déterminer les équivalences de ce type appelées dans la suite congruences pour le groupe linéaire $GL(m)$.

D'abord nous établissons quelques lemmes.

Lemme 1. *Pour que l'équivalence C définie dans X de la forme (4) soit compatible avec les transformations de la forme (5) et satisfasse à la condition:*

$$(6) \quad (x, x') \in C \Rightarrow \exists_{\rho \in R} (x' = \rho x),$$

où R dénote le groupe multiplicatif des nombres réels différents de 0, il faut et il suffit qu'elle prenne la forme:

$$(7) \quad (x, x') \in C \Leftrightarrow \exists_{\rho \in Q} (x' = \rho x),$$

où Q est un sousgroupe arbitraire du groupe R .

Démonstration. Parce que toute relation C de la forme (7) est une congruence pour le groupe $GL(m)$ satisfaisant à la condition (6) la suffisance est évidente.

Nécessité. Posons:

$$Q_x \stackrel{\text{df}}{=} \{ \rho \in R : (x, \rho x) \in C \}.$$

Comme la relation C est réflexive, symétrique et transitive dans X et satisfait à la condition (6) Q_x doit être un sousgroupe de R pour tout $x \in X$.

D'après la transitivité du groupe $GL(m)$ dans X il existe pour tous $x, y \in X$ la matrice $M \in GL(m)$ telle que l'on ait:

$$y = Mx.$$

Si $\rho \in Q_x$ on a $(x, \rho x) \in C$. Parce que la relation C est supposée compatible avec le groupe $GL(m)$ on a aussi $(Mx, M\rho x) \in C$ mais, comme $M(\rho x) = \rho(Mx) = \rho y$, il en résulte $(y, \rho y) \in C$ c'est-à-dire $\rho \in Q_y$. Ainsi nous avons la relation:

$$Q_x \subset Q_y$$

d'où, en changeant les rôles de x et y , nous obtenons l'égalité:

$$Q_x = Q_y = Q.$$

Donc nous voyons que toute congruence C pour le groupe $GL(m)$ détermine un sousgroupe Q du groupe R tel que la congruence C s'exprime par la formule (7). Notre lemme se trouve ainsi démontré.

Lemme 2. *Toute congruence C pour le groupe $GL(m)$, où $m \geq 2$, ne satisfaisant pas à la condition (6) doit être totale c'est-à-dire exprimée par la formule:*

$$C = X \times X.$$

Démonstration. Soit $x, y \in X$. Comme la congruence C ne satisfait pas à la condition (6) il existe un point $x' \in X$ tel que l'on ait:

$$(8) \quad (x, x') \in C$$

et

$$(9) \quad x' \neq \rho x \text{ pour tout } \rho \in R.$$

D'autre part la propriété suivant du groupe $GL(m)$ pour $n \geq 2$ est bien connue.

Propriété TD: Pour tout système $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ des points de X satisfaisant aux conditions:

$$(10) \quad x_2 \neq \rho x_1, y_2 \neq \rho y_1 \text{ pour tout } \rho \in R$$

il existe une matrice $M \in GL(m)$ telle que l'on ait

$$(11) \quad y_i = Mx_i \quad (i = 1, 2).$$

En posant $x_1 = x, x_2 = y_2 = x', y_1 = y'$, où y' est un point fixe de X satisfaisant à la condition:

$$(12) \quad y' \neq \rho x' \text{ pour tout } \rho \in R$$

les conditions (10) sont, en vertu de (9) et (12), remplies et nous en déduisons qu'il existe la matrice $M \in GL(m)$ telle que l'on ait:

$$y' = Mx \text{ et } x' = Mx'.$$

En vertu de (8) et de la compatibilité de la relation C avec le groupe $GL(m)$ il en résulte la relation:

$$(y', x') \in C$$

done aussi, d'après (8),

$$(x, y') \in C$$

pour tout $y' \in X$ satisfaisant à la condition (12).

