ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

Nr CCIII PRACE MATEMATYCZNE, ZESZYT 13 1969

Jan Chabrowski

Sur l'unicité des solutions des équations paraboliques et elliptiques

Dans la présente note on considère la question de l'unicité pour les équations elliptiques et paraboliques aux coefficients bornés, dans la classe de solutions définies et non bornées dans tout l'espace. Le problème analogue pour les équations elliptiques a été traité par T. Kusano [2]. Notre résultat concernant les équations elliptiques est plus général que dans [2].

1. Soit E_n l'espace euclidien à n dimensions de points $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, u_{x_i} + c(x)\, u = f(x) \tag{1.1}$$

l'équation elliptique en question.

On suppose que

I. Les coefficients de l'équation (1.1) sont définis et bornés dans E_n et $c(x) \leqslant 0$ pour $x \in E_n$.

II. $$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geqslant a_0 |\xi|^2 \quad \left(a_0 > 0,\ |\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)$$

pour $x \in E_n$ et pour tout vecteur $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Le théorème suivant est bien connu ([1]).

Théorème 1. *Dans les hypothèses* I *et* II, *pour chaque domaine borné $D \subset E_n$ il existe une fonction $\omega(x)$ positive, bornée, de classe $C^2(D)$ et satisfaisant à l'inégalité $L\omega(x) \leqslant -1$ dans D.*

A l'aide de ce théorème nous allons construire une fonction qui possède des propriétés analogues mais définie dans tout l'espace E_n.

Théorème 2. *Supposons que les hypothèses* I *et* II *soient satisfaites et que $c(x) \leqslant -g$ pour $|x| \geqslant R$, où g et R sont des constantes positives.*

Dans ces hypothèses il existe une fonction $z(x)$ telle que

1° $z(x) > 0$ *pour* $x \in E_n$.

2° $z(x)$ *appartient à la classe* $C^2(E_n)$ *et* $Lz(x) \leqslant -1$ *dans* E_n.

3° $\lim\limits_{|x|\to\infty} z(x) = \infty$.

Démonstration. En vertu du théorème 1 il existe une fonction $\overline{\omega}(x)$ telle que $L\overline{\omega}(x) \leqslant -1$ et $\overline{\omega}(x) > 0$ pour $|x| \leqslant R$. Nous pouvons définir une fonction $\omega(x)$ non négative, de classe $C^2(E_n)$, qui coïncide avec $\overline{\omega}(x)$ pour $|x| \leqslant R$.

Soit

$$\overline{L} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Posons

$$\bar{z}(x) = \varphi(x)\omega(z)\nu + H(x) \tag{1.2}$$

où

$$H(x) = \prod_{i=1}^{n} \cosh kx_i, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| \leqslant R, \\ 0 & \text{pour } |x| \geqslant R_1, \end{cases}$$

$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, $\varphi(x) \in C^2(E_n)$, $R_1 > R$. Les constantes k et $\nu > 0$ seront convenablement choisies. Evidemment $\bar{z}(x) > 0$ pour $x \in E_n$ et $\lim\limits_{|x|\to\infty} \bar{z}(x) = \infty$. Par un calcul simple nous obtenons

$$\begin{aligned} L\bar{z}(x) = L(\varphi\omega\nu + H) = \nu\Big[\omega\overline{L}\varphi + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\varphi_{x_i}\omega_{x_j} + \varphi_{x_j}\omega_{x_i}) + \varphi L\omega\Big] + \\ + H\Big[\sum_{i,j=1}^{n} k^2 a_{ij}\operatorname{tgh} kx_i \operatorname{tgh} kx_j + \sum_{i=1}^{n} kb_i \operatorname{tgh} kx_i + c\Big] \equiv \\ \equiv \nu A(x) + H(x)B(x)\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Si $R \leqslant |x| \leqslant R_1$, alors en vertu de l'hypothèse $c(x) \leqslant -g$; on peut donc choisir les constantes ν, k_1 assez petites de manière que

$$\nu A(x) \leqslant \frac{g}{4}, \tag{1.4}$$

$$H(x)B(x) \leqslant -\tfrac{3}{4}gH(x) \leqslant \frac{3g}{4} \quad \text{pour } k \leqslant k_1\,. \tag{1.5}$$

Il résulte des inégalités (1.4) et (1.5) que pour $R \leqslant |x| \leqslant R_1$ nous avons

$$L\bar{z}(x) \leqslant -\frac{g}{2}. \tag{1.6}$$

En vertu de l'égalité (1.3) et des définitions des fonctions $\varphi(x)$ et $\omega(x)$ nous avons

$$(1.7)\qquad L\bar{z}(x) = \nu L\omega + LH \leqslant -\nu + LH$$
$$\leqslant -\nu + H\Big[\sum_{i,j=1}^{n} k^2 a_{ij} \operatorname{tgh} kx_i \operatorname{tgh} kx_j + \sum_{i=1}^{n} kb_i \operatorname{tgh} kx_i\Big]$$

pour $|x| \leqslant R$ et

$$(1.8)\qquad L\bar{z}(x) = LH = H(x)B(x) \text{ pour } |x| \geqslant R_1 .$$

Il résulte de (1.7) que pour $k \leqslant k_2$ (k_2 assez petit) on a

$$(1.9)\qquad L\bar{z}(x) \leqslant -\frac{\nu}{2} \quad \text{pour } |x| < R .$$

Si $|x| \geqslant R_1$, alors $c(x) \leqslant -g$, donc d'après (1.8) il existe une constante k_3 telle que pour $k \leqslant k_3$ nous avons

$$(1.10)\qquad L\bar{z}(x) \leqslant -\frac{g}{2} H \leqslant -\frac{g}{2} .$$

Posons dans la définition de la fonction $\bar{z}(x)$ $k = k_0 = \min(k_1, k_2, k_3)$. Il est évident que cette fonction vérifie les inégalités (1.6), (1.9) et (1.10). Enfin, la fonction $z(x) = C\bar{z}(x)$ satisfait aux conditions 1°, 2°, 3° pourvu que C soit une constante convenablement choisie.

Remarque 1. Il est évident que la fonction $z(x)$ satisfait à l'inegalité

$$(1.11)\qquad z(x) \geqslant C_k \exp(k|x|), \quad \text{où } k < k_0 ,$$

(la constante C_k dépend de k).

Nous disons que la fonction $u(x)$ définie dans E_n appartient à la classe E_1 lorsqu'elle satisfait à l'inégalité

$$|u| \leqslant C\exp(k|x|), \quad \text{où } k < k_0 .$$

En appliquant le théorème 2 nous allons démontrer un théorème sur les inégalités différentielles aux dérivées partielles.

Théorème 3. *Dans les hypothèses du théorème 2, chaque fonction $u(x)$ qui appartient à la classe $E_t \cap C^2(E_n)$ et telle que $Lu(x) \geqslant 0$ ($Lu(x) \leqslant 0$) dans E_n satisfait à l'inégalité*

$$(1.12)\qquad u(x) \leqslant 0 \ \ (u(x) \geqslant 0) \ \ \textit{pour } x \in E_n .$$

Démonstration. Nous montrerons seulement la première partie du théorème. Dans ce but nous posons

$$u(x) = w(x)z(x) ,$$

où $z(x)$ est la fonction construite dans le théorème 2. L'inégalité (1.12) est équivalente à l'inégalité

$$(1.13)\qquad w(x) \leqslant 0 \text{ pour } x \in E_n .$$

Il suffit donc de démontrer (1.13). En vertu de la remarque 1 il existe des constantes s et C_s telles que

$$z(x) \geqslant C_s \exp(s|x|), \quad k < s < k_0,$$

donc à chaque $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre R_0 tel que pour $|x| \geqslant R_0$ on ait

$$w(x) \leqslant \varepsilon . \tag{1.14}$$

Nous montrerons que l'inégalité (1.14) est remplie dans E_n. Dans le cas contraire il existe un point x_0 tel que

$$\varepsilon < w(x_0) = \max_{|x| \leqslant R_0} w(x) .$$

D'après l'inégalité (1.14), x_0 est un point intérieur de la sphère $\{x\colon |x| \leqslant R_0\}$, donc

$$w_{x_i}(x_0) = 0 \ \ (i = 1, \ldots, n), \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\lambda_i\lambda_j \leqslant 0 \tag{1.15}$$

pour tout système $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

D'autre part nous avons

$$0 \leqslant Lu = Lwz = z\bar{L}w + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(z_{x_i}w_{x_j} + z_{x_j}w_{x_i}) + wLz .$$

Selon (1.4) et la condition 2° du théorème précédent le second membre de cette inégalité est négatif au point x_0 ce qui est impossible.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 3.

Théorème 4. *Dans les hypothèses du théorème 2 l'équation*

$$Lu(x) = f(x)$$

admet dans la classe E_1 au plus une solution.

2. On peut considérer un problème analogue pour les équations paraboliques.

Soit E_{n+1} l'espace-temps de points $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_n)$ et

$$\Lambda u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x) u_{x_i} + c(t, x) u - u_t = f(t, x) \tag{2.1}$$

l'équation parabolique en question.

On suppose que

I'. Les coefficients $a_{ij}(t, x)$, $b_i(t, x)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ de l'équation (2.1) sont définis et bornés dans E_{n+1} et pour un t_0 sont vérifiées les inégalités

$$c(t, x) \leqslant -m \quad (m > 0) \quad (t \leqslant t_0, x \in E_n)$$

$$c(t, x) \leqslant K \quad (t \geqslant t_0, x \in E_n) ,$$

où K est une constante;

II'.
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geqslant 0$$
pour $(t,x)\in E_{n+1}$ et pour tout vecteur $(\xi_1,\dots,\xi_n)$.

Theorème 5. *Dans les hypothèses* I' *et* II' *il existe une fonction* $z(t,x)$ *possédant les propriétés suivantes*

1° $z(t,x) > 0$ *pour* $(t,x)\in E_{n+1}$,

2° $z(t,x)$ *appartient à la classe* $C^2(E_{n+1})$ *et* $\Lambda z(t,x) \leqslant -1$ *dans* E_{n+1},

3° $\lim\limits_{r\to\infty} z(t,x) = \infty$, *où* $r = \{\sum x_i^2 + t^2\}^{1/2}$.

Démonstration. Posons

$$\bar{z}(t,x) = H(t,x)[\omega(t)\varphi(t)\nu+1] \tag{2.2}$$

où

$$H(t,x) = \cosh kt\prod_{i=1}^{n}\cosh kx_i, \qquad \varphi(t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } t\geqslant t_0 \\ 0 \text{ pour } t \leqslant t_1\end{cases},$$

$t_1 < t_0$, $0\leqslant\varphi(t)\leqslant 1$, $\varphi(t)$ appartient à la classe C^1, $\omega(t) = \exp\big(M(t-t_0)\big)$. Les constantes positives M, k, ν seront convenablement choisies. Il est clair que $\lim\limits_{r\to\infty}\bar{z}(t,x) = \infty$ et $\bar{z}(t,x) > 0$ pour $(t,x)\in E_{n+1}$.

Par un calcul simple nous obtenons

$$\Lambda\bar{z} = H\Big\{-M\omega\varphi\nu + c(\omega\varphi\nu+1) + (\omega\varphi\nu+1)\Big[\sum_{i,j=1}^{n} k^2a_{ij}\operatorname{tgh}kx_i\operatorname{tgh}kx_j + \sum_{i=1}^{n} kb_i\operatorname{tgh}kx_i - k\operatorname{tgh}kt\Big] - \omega\varphi_t\nu\Big\}. \tag{2.3}$$

Si $t_1\leqslant t\leqslant t_0$, alors en vertu de l'hypothèse $c(t,x)\leqslant -m$; nous pouvons donc choisir des constantes ν, k_1 assez petites de manière que

$$\Lambda\bar{z} \leqslant -\frac{m}{2}H \text{ (pour } k\leqslant k_1\text{)}. \tag{2.4}$$

Si $t\leqslant t_1$, alors l'égalité (2.3) prend la forme

$$\Lambda\bar{z} = H\Big[\sum_{i,j=1}^{n} k^2a_{ij}\operatorname{tgh}kx_i\operatorname{tgh}kx_j + \sum_{i=1}^{n} kb_i\operatorname{tgh}kx_i - k\operatorname{tgh}kt + c\Big]. \tag{2.5}$$

En prenant $k\leqslant k_2$ (k_2 assez petit) nous avons

$$\Lambda\bar{z} \leqslant -\frac{m}{2}H. \tag{2.6}$$

Dans le cas $t\geqslant t_0$ l'égalité (2.3) prend la forme

$$\Lambda\bar{z} = H\Big\{\omega\nu(c-M) + c + (\omega\nu+1)\Big[\sum_{i,j=1}^{n} k^2a_{ij}\operatorname{tgh}kx_i\operatorname{tgh}kx_j + \sum_{i=1}^{n} kb_i\operatorname{tgh}kx_i - k\operatorname{tgh}kt\Big]\Big\}.$$

On voit aisément que

(2.7) $$\Lambda\bar{z} \leqslant -\frac{m}{|2}H\,,$$

si le nombre M est suffisamment grand et k assez petit ($k \leqslant k_3$).

Posons dans la formule (2.2) $k = k_0 = \min(k_1, k_2, k_3)$. Il est évident que cette fonction vérifie les inégalités (2.4), (2.6), (2.7). Enfin, la fonction $z(t, x) = C\bar{z}(t, x)$, où C est une constante convenablement choisie, satisfait aux conditions 1°, 2°, 3°.

Remarque 2. Il résulte de la construction de $z(t, x)$ que

$$z(t, x) \geqslant C_k \exp(k\, r) \text{ pour } k < k_0\,,$$

où la constante C_k dépend de k.

Cette remarque permet d'introduire une certaine classe de fonctions, à savoir: nous disons qu'une fonction $u(t, x)$ définie dans E_{n+1} appartient à la classe ε_1 lorsqu'elle satisfait à l'inégalité

$$|u(t, x)| \leqslant C\exp(kr),\ \text{où } k < k_0\,.$$

En modifiant un peu la démonstration du théorème 3, à l'aide du théorème précédent on parvient au

Théorème 6. *Dans les hypothèses* I′ *et* II′ *chaque fonction qui appartient à la classe* $\varepsilon_1 \cap C^2(E_{n+1})$ *et telle que* $\Lambda u \geqslant 0$ ($\Lambda u \leqslant 0$) *dans* E_{n+1}, *satisfait à l'inégalité* $u(t, x) \leqslant 0$ ($u(t, x) \geqslant 0$) *pour* $(t, x) \in E_{n+1}$.

Ce théorème permet d'énoncer le suivant

Théorème 7. *Dans les hypothèses du théorème* 5 *l'équation*

$$\Lambda u(t, x) = f(t, x)$$

admet dans la classe ε_1 *au plus une solution.*

TRAVAUX CITÉS

[1] K. Akô, I. Sato, *On generalized Peano's theorem concerning the Dirichlet problem for semi-linear elliptic differential equations*, Proc. Jap. Acad. 16 (1960),

[2] T. Kusano, *On bounded solutions of elliptic partial differential equations of the second order*, Funkcialaj Ekvacioj 7 (1965), 103—118.