ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
Nr. CCXXIII PRACE MATEMATYCZNE. ZESZYT 14 1969

*G. Majcher*

# Applications des équations fonctionnelles dans la théorie des équations différentielles partielles

Les équations fonctionnelles paraissent bien souvent dans la théorie des équations partielles et il n'y a pas de difficultés d'en trouver des exemples. Le but de cet article est d'en présenter quelques uns sans prétendre à contenir tout ce qu'on a fait sur ce sujet. L'index de la littérature (v. la fin de cet article) n'est pas aussi complet. Il contient seulement ces travaux d'où viennent les exemples cités.

Nous allons distinguer ici trois sortes de problèmes concernant les applications des équations fonctionnelles

1° dans le problème de Goursat pour l'équation partielle du second ordre, (§ 1),

2° dans le problème de Goursat généralisé et dans l'application de l'intégrale le Roux (§ 2),

3° dans le problème de Goursat pour les équations partielles de l'ordre supérieur (§ 3).

En général il s'agit des problèmes où l'on cherche la solution d'une équation aux dérivées partielles admettant des valeurs données d'avance sur une ou plusieurs courbes. Comme exemple nous présentons ici le problème de Goursat, mais il y en a beaucoup d'autres. Les équations fonctionnelles paraissent souvent dans le cas où l'on trouve d'abord la solution générale de l'équation en question et où l'on essaie ensuite de déterminer les fonctions arbitraires y intervenant — de manière, que cette solution générale satisfasse aux conditions aux limites.

§ 1. Prenons d'abord le problème posé par E. Goursat ([6]) pour l'équation

$$u''_{xy}(x, y) = f(x, y)\,, \tag{1}$$

avec les conditions aux limites

$$u(x, \alpha(x)) = \varphi(x)\,, \quad x \in \langle 0, a\rangle\,, \tag{2}$$

$$u(\beta(y), y) = \psi(y)\,, \quad y \in \langle 0, b\rangle\,, \tag{3}$$

$$\varphi(0) = \psi(0)\,,$$

où les courbes

$$\Gamma_x\colon\ y = \alpha(x)\,, \quad x \in \langle 0, a\rangle\,,$$
$$\Gamma_y\colon\ x = \beta(y)\,, \quad y \in \langle 0, b\rangle\,,$$

issues de l'origine de coordonnées n'ont pas d'autres points communs et sont situées dans un rectangle $P$.

On cherche la solution de classe $C^{1*}$ dans $P$, c'est à dire de classe $C^1$ avec $u''_{xy}$ continue. Les hypothèses: $\alpha, \beta, \varphi, \psi \in C^1$ dans $\langle\ \rangle$[1] respectivement et $f \in C^0$ dans $P$ sont suffisantes pour démontrer l'unicité des solutions mais il est indispensable de la renforcer afin d'assurer l'existence.

Il y a aussi trois possibilités essentielles s'il s'agit de courbes données: 1° elles ne sont pas tangentes l'une à l'autre à O, 2° elles ont une tangente commune au point 0 mais celle-ci n'est parallèle à aucune des deux familles de caractéristiques $x =$ const., $y =$ const., 3° les courbes sont tangentes à une caracteristique. Ici il faut changer convenablement les hypothèses sur la dérivée $\alpha'$ ou $\beta'$ au point 0 car elle n'est plus finie.

E. Goursat a résolu ce problème dans le cas premier, le plus facile. Les deux autres cas exigent certaines précautions, car les séries qui y interviennent ne sont convergentes que sous certaines conditions. Le troisième cas englobe comme cas particuliers les autres problèmes connus pour les équations aux dérivées partielles comme ceux de Darboux et de Picard.

En intégrant deux fois l'équation (1) on reçoit son intégrale générale de la forme

$$u(x, y) = \int_0^x \Big[\int_0^y f(\xi, \eta)\, d\eta\Big] d\xi + G(x) + H(y) + \frac{\varphi(0)+\psi(0)}{2}\,, \tag{4}$$

où $G$, $H$ sont des fonctions quelconques de classe $C^1$ dans $\langle\ \rangle$. On va les déterminer de manière que la fonction (4) satisfasse aux conditions (2) et (3). Ainsi A. Bielecki et J. Kisyński ([4]) aboutissent dans leur travail de 1956 à un système de deux équations fonctionnelles avec deux fonctions inconnues:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &G(x) + H[\alpha(x)] = \Phi(x)\,, \quad && x \in \langle 0, a\rangle\,,\\ &G[\beta(y)] + H(y) = \Psi(y)\,, \quad && y \in \langle 0, b\rangle\,,\\ &G(0) = H(0) = 0\,. \end{aligned}$$

Ayant en vue le problème de Goursat on cherche $G$ et $H \in C^1$. Pour résoudre le système (5) les auteurs définissent deux suites fonctionnelles

$$(6)\quad \lambda(x) = \beta\big(\alpha(x)\big)\,, \qquad \lambda^0(x) = x\,, \qquad \lambda^k(x) = \lambda[\lambda^{k-1}(x)]\,, \qquad \text{pour } x \in \langle 0, a\rangle\,,$$

$$(7)\quad \mu(y) = \alpha\big(\beta(y)\big)\,, \qquad \mu^0(y) = y\,, \qquad \mu^k(y) = \mu[\mu^{k-1}(y)]\,, \qquad \text{pour } y \in \langle 0, b\rangle\,,$$

---

[1] $\langle\ \rangle$ signifie „l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ ou $\langle 0, b\rangle$ resp."

décroissantes, $\neq 0$ au point 0 et qui tendent uniformément vers zéro lorsque $k$ augmente indéfiniment. En éliminant dans le systeme (5) $G$ ou $H$ on reçoit respectivement

$$G(x)-G[\lambda(x)] = \sigma(x)\,, \qquad x \in \langle 0, a\rangle\,, \tag{8}$$

$$H(y)-H[\mu(y)] = \tau(y)\,, \qquad y \in \langle 0, b\rangle\,, \tag{9}$$

où

$$\lambda(x) = \beta\big(\alpha(x)\big)\,, \ \mu(y) = \alpha\big(\beta(y)\big)\,,$$

$$\sigma(x) = \Phi(x)-\Psi[\alpha(x)]\,, \qquad \tau(y) = \Psi(y)-\Phi\big(\beta(y)\big)\,.$$

Si la fonction $G$ vérifie l'équation (8) et si elle satisfait à la condition $\lim\limits_{x\to 0} G(x) = G(0) = 0$, alors la série

$$G(x) = \sum_{i/0}^{\infty} \sigma[\lambda^i(x)], \qquad x \in \langle 0, a\rangle \tag{10}$$

est uniformément convergente dans $\langle 0, a\rangle$. La même chose concerne l'équation (9) et la série

$$H(y) = \sum_{i/0}^{\infty} \tau[\mu^i(y)]\,, \qquad y \in \langle 0, b\rangle\,. \tag{11}$$

On démontre aussi que si l'une de ces deux séries est uniformément convergente dans $\langle\ \rangle$ l'autre l'est aussi et elles représentent la solution unique du systeme (5). Il convient de remarquer que $\beta$ ne doit ici nécessairement avoir une dérivée finie au point $y = 0$ ainsi que $\alpha$.

Dans le cas le plus simple quand $0 \leqslant \alpha'(0).\ \beta'(0) < 1$ le problème de Goursat admet une seule solution de la forme (4) avec $G$ et $H$ de la forme (10) et (11) de classe $C^1$.

Dans le cas particulier $\alpha \equiv 0$ dans $\langle 0, a\rangle$, $\beta'(0)$ fini, l'hypothèse $0 \leqslant \alpha'(0).\ \beta'(0) < 1$ est évidente et nous recevons la solution du problème de Picard de la forme

$$u(x, y) = \int_0^y \Big[\int_{\beta(y)}^x f(\xi, \eta)\, d\xi\Big] d\eta + \varphi(x) + \psi(y) - \varphi\big(\beta(y)\big)\,.$$

Si de plus $\beta \equiv 0$ dans $\langle 0, b\rangle$ on reçoit la solution

$$u(x, y) = \int_0^y \Big[\int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\Big] d\eta + \varphi(x) + \psi(y) - \frac{\varphi(0)+\psi(0)}{2}$$

du problème de Darboux.

Dans les cas $\alpha'(0)\beta'(0) = 1$ (les courbes $\Gamma_x, \Gamma_y$ tangentes) ou $\alpha'(0) = 0$ et $\beta'(0) = +\infty$ ont peut raisonner comme auparavant. On reçoit la solution unique du problème de Goursat de la forme

$$u(x, y) = \int_0^x \Big[\int_0^y f(\xi, \eta)\, d\eta\Big] d\xi + Ax + By + C + G(x) + H(y), \tag{12}$$

où $A, B, C$ sont certains nombres. Ce qui est essentiel ce sont les hypothèses assurant la convergence des séries (10) et (11) et des séries obtenues en les dérivant terme à terme. On suppose que les fonctions

$$\left|\frac{d}{dx}\lambda^i(x)\right|, \quad \left|\frac{d}{dx}\mu^i(x)\right| \tag{13}$$

sont uniformément bornées dans $(0, a\rangle$, qu'il existe une fonction $\chi(x, y) \in C^1$ dans $P$ telle que

$$\chi(x, y) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{sur} \quad \Gamma_x, \\ \psi(y) & \text{sur} \quad \Gamma_y, \end{cases} \tag{14}$$

que dans $P$

$$\begin{aligned} |\chi'_x(x, y) - \chi'_x(x, \bar{y})| &\leqslant L|y - \bar{y}|, \\ |\chi'_y(x, y) - \chi'_y(\bar{x}, y)| &\leqslant L|x - \bar{x}|, \end{aligned} \tag{15}$$

et que $\lim\limits_{y\to 0} y\beta'(y) = 0$. (Dans (12) $A = \chi'_x(0, 0)$, $B = \chi'_y(0, 0)$, $C = \chi(0, 0)$). Maintenant la série (11) est convergente presque uniformément dans $\langle 0, b\rangle$ mais $H'(y)$ est encore continue dans $\langle 0, b\rangle$.

L'équation plus générale

$$u''_{xy} = F(x, y, u, u'_x, y'_y) \tag{16}$$

fait fournir encore plus des difficultés. On exige d'habitude, pour avoir l'existence et l'unicité de la solution du problème de Goursat, que la fonction $F$ soit continue dans un domaine de cinq variables et qu'elle y satisfasse à la condition de Lipschitz relatif à $u, p, q$; c'est qui permet d'employer ensuite la méthode des approximations successives. En 1957 J. Kisyński ([7]) a posé la question: peut on renoncer à la condition de Lipschitz relatif à $u, p, q$, renoncer à la méthode des approximations successives, introduire une condition plus générale et recevoir l'existence et l'unicité dans un théorème à la fois? La réponse y est positive. Il faut noter que Z. Szmydt ([14]-[16]) a aussi introduit des conditions tres générales pour $F$ mais les théorèmes de J. Kisyński ne résultent pas de ceux de Z. Szmydt.

J. Kisyński a étudié pour l'équation (16) le problème de Cauchy et le problème de Goursat qui englobe ceux de Darboux et de Picard. Chez lui les courbes $\Gamma$ sont monotones non-décroissantes et de classe $C^1$ dans $\langle\ \rangle$, on suppose (13), on introduit aussi la fonction $\chi(x, y)$ avec la condition (15) et pour $F$ continue dans l'ensemble $\{(x, y) \in \Delta,\ u, p, q \text{ arbitraires}\}$ on suppose la condition

$$|F(x, y, u, p, q) - F(x, y, \bar{u}, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \omega(|u - \bar{u}| + |p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|) \tag{17}$$

où $\omega(\delta) \in C^0$, $\omega(\delta)$ non-décroissante pour $\delta \geqslant 0$, $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$, $\int\limits_0^\delta \frac{dt}{\omega(t)}$ divergente pour chaque $\delta > 0$. La démonstration du théorème est assez longue et compliquée. En passant à une autre équation équivalente, on reçoit enfin la solution générale de l'équation (16) avec des fonctions arbitraires qui sont les solutions d'un système des deux équations fonctionnelles analogues à (8) et (9).

§ 2. L'emploi de l'intégrale le Roux. L'équation différentielle est maintenant linéaire de la forme

$$(18)\qquad H[u] \equiv u''_{xy} + a(x, y)u'_x + b(x, y)u'_y + c(x, y)u = f(x, y).$$

$V(x, y; s, t)$ est la fonction de Riemann pour l'équation homogène $H[u] = 0$. Comme fonction du point $(x, y)$ elle satisfait justement à cette équation homogène et en outre aux conditions aux limites

$$(19)\qquad \begin{aligned} V(x, y; x, t) &= \exp\Big[\int_y^t a(x, \eta)\,d\eta\Big] \Rightarrow V'_y = -aV,\\ V(x, y; s, y) &= \exp\Big[\int_x^s b(\xi, y)\,d\xi\Big] \Rightarrow V'_x = -bV. \end{aligned}$$

Cette fonction se représente par une série dont les termes sont définis par recourrence. Si les coefficients de l'équation (18) sont continues dans un ensemble $Z$ contenant chaque rectangle aux sommets opposés $(x, y), (s, t)$, alors la fonction de Riemann est de classe $C^{1*}$ par égard à $(x, y)$. Si les coefficients sont de classe $C^1$, celle-ci est de classe $C^2$ par égard à $(x, y)$ et de classe $C^{1*}$ par égard à $(s, t)$.

En 1895 le Roux ([11]) a remarqué que les intégrales de la forme

$$\int_{\beta_1(y)}^{x} V\big(x, y; s, \alpha_1(s)\big)\varphi(s)\,ds, \quad \int_{y}^{\alpha_2(x)} V\big(x, y; \beta_2(t), t\big)\psi(t)\,dt$$

avec des fonctions $\alpha_i$, $\beta_i$ réciproquement inverses satisfont à l'équation $H[u] = 0$ pour chaque couple de fonctions $\varphi$ et $\psi$ continues. Ces intégrales nommées par lui les intégrales principales paraissent de temps en temps dans la littérature sous le nom des intégrales le Roux.

Soit maintenant $\Gamma_i$, $i = 1, 2$ deux courbes monotones non-décroissantes représentées par $y = \alpha_i(x)$, $x \geqslant 0$ et avec des fonctions inverses $\beta_i(y)$, $y \geqslant 0$. Les coefficients $a, b, c$ et la fonction $f$ sont données dans le domaine $D$ $\{(x, y)$: $x \geqslant 0,\ \alpha_1(x) \leqslant y \leqslant \alpha_2(x)\}$. Les conditions aux limites (proposées par M. Krzyżański) sont:

(20) a) $u(0, 0) = \mathring{u}$,

b) $A_i(x)u'_x(x, y) + B_i(x)u'_y(x, y) + C_i(x)u(x, y) = g_i(x)$

pour $y = \alpha_i(x)$, $x \geqslant 0$, $i = 1, 2$.

Cherchons la solution généralisé du problème de Goursat de la forme

$$(21)\qquad u(x,y)=\mathring{u}+\int_{\beta_1(y)}^{x}V\big(x,y;\,s,\alpha_1(s)\big)\varphi(s)\,ds+\int_{y}^{\alpha_2(x)}V\big(x,y;\,\beta_2(t),t\big)\psi(t)\,dt-$$
$$-\int_{x}^{\beta_1(y)}\Big\{\int_{\alpha_1(s)}^{y}V(x,y;\,s,t)[f(s,t)-c(s,t)\mathring{u}]\,dt\Big\}\,ds\,.$$

Cette fonction satisfait à l'équation (18) et à la condition (20a) pour chaque couple $\varphi$ et $\psi$ continues. Maintenant if faut déterminer $\varphi$ et $\psi$ de manière que $u$ de la forme (21) satisfasse aux conditions 20b.

1° Si $A_i\equiv B_i\equiv 0$, $C_i\neq 0$ pour chaque $x\geqslant 0$ nous avons le problème classique de Goursat traité par O. Sjöstrand ([13]) en 1929 et pour tous les trois cas possible de la situation de $\Gamma_i$. De (20b) et de (21) il a reçu

$$(22)\qquad \begin{aligned}&\int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)}V\big(x,\alpha_1(x);\,\beta_2(t),t\big)\psi(t)\,dt=(x)\ ^{1}\\ &\int_{\beta_1(\alpha_2(x))}^{x}V\big(x,\alpha_2(x);\,s,\alpha_1(s)\big)\varphi(s)\,ds=(x)\,.\end{aligned}$$

Sous les hypothèses convenables on différentie les deux parties de (22), on en élimine p.ex. $\varphi$ et on aboutit à l'équation fonctionnelle

$$(23)\qquad \psi(y)-\gamma(y)\psi\big(\lambda(y)\big)-\int_{\lambda(y)}^{y}K(y,t)\psi(t)\,dt=G(y)\,,$$

où $\lambda(y)=\alpha_1\big(\beta_2(y)\big)$. O. Sjöstrand l'a résolu en cherchant $\psi$ de la forme

$$(24)\qquad \psi(y)=\sum_{n/0}^{\infty}\psi_n(y)\,,$$

où

$$(25)\qquad \begin{aligned}&\psi_0(y)-\gamma(y)\psi_0\big(\lambda(y)\big)=G(y)\,,\\ &\psi_n(y)-\gamma(y)\psi_n\big(\lambda(y)\big)=\int_{\lambda(y)}^{y}K(y,t)\psi_{n-1}(t)\,dt\qquad n=1,2,\ldots\end{aligned}$$

2° Le cas $A_1B_2\neq 0$ ou $A_2B_1\neq 0$, pour chaque $x\geqslant 0$. Ce problème a été étudié à l'aide de l'intégrale le Roux par A. K. Aziz et J. B. Diaz en 1962 ([3]) et Sherwood C. Chu et J. Diaz en 1964 ([12]) mais avec les hypothèses de sorte que

$$(26)\qquad 0\leqslant A_1(x)\leqslant kx\,,\quad 0\leqslant B_2(x)\leqslant mx\,,\ km<1\ \ |g_1(x)|\leqslant px$$

etc. Ils ont reçu aussi les équations fonctionnelles du type (23).

---

[1] Pour abréger l'écrit le symbole $(x)$ signifie dans tout l'article „une fonction connue de variable $x$".

Je me suis proposée de trouver la solution sans hypothèses du type (26) ([8]). Profitant des conditions (20b) j'ai reçu un système des deux équations en $\varphi$ et $\psi$ de la forme

$$(\boldsymbol{x})\varphi(x)+(\boldsymbol{x})\psi(\alpha_1(x))+(\boldsymbol{x})\psi(\alpha_2(x))+\int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} K_1(x,t)\psi(t)\,dt=(\boldsymbol{x}) ,$$

$$(\boldsymbol{y})\psi(y)+(\boldsymbol{y})\varphi(\beta_1(y))+(\boldsymbol{y})\varphi(\beta_2(y))+\int_{\beta_1(y)}^{\beta_2(y)} K_2(s,y)\varphi(s)\,ds=(\boldsymbol{y}) .$$

En éliminant p.ex. $\psi$ on a pour $\varphi$ l'équation du type

$$(\boldsymbol{x})\varphi(x)+(\boldsymbol{x})\varphi[\beta_1(\alpha_2(x))]+(\boldsymbol{x})\varphi[\beta_2(\alpha_1(x))]$$
$$=(\boldsymbol{x})+\int_{x}^{\beta_2(\alpha_1(x))}\varkappa_1(x,s)\varphi(s)\,ds+\int_{\beta_1(\alpha_2(x))}^{x}\varkappa_2(x,s)\varphi(s)\,ds . \tag{27}$$

Si l'on désigne $z=\beta_1(\alpha_2(x))$, $z_n=\beta_2(\alpha_1(z_{n-1}))$, $z_0=z$, on a $x=z_1$, $\beta_2(\alpha_1(x))=z_2$, d'où (27) prend la forme (sous certaines hypothèses)

$$\varphi(z)+(\boldsymbol{z})\varphi(z_1)+(\boldsymbol{z})\varphi(z_2)=(\boldsymbol{z})+$$
$$+\int_{z}^{z_1}\tilde{\varkappa}_1(z,s)\varphi(s)\,ds+\int_{z_1}^{z_2}\tilde{\varkappa}_2(z,s)\varphi(s)\,ds \tag{28}$$

et cette équation fonctionnelle peut etre résolue de la même manière que (23) (v. (24), (25)). On reçoit un système infini des équations fonctionnelles linéaires analogue à (25) mais du second ordre. La solution du problème de Goursat est locale dans un entourage du O. On la prolonge ensuite pour tout $D$. Ceci concerne le cas quand les courbes ne sont pas tangentes l'une a l'autre.

Les cas $A_1B_2\neq 0$, $A_2B_1\neq 0$ sont particuliers d'un problème plus général de Z. Szmydt étudié par elle tout à fait autrement ([14]-[16]).

3° Il y a un cas très particulier: $A_i\equiv 0$, $B_i\equiv 0$, $i=1,2$ qui ne résulte pas du problème de Z. Szmydt et qui donne un nouveau problème étudié par moi en 1965 ([9]). Celui-ci se montre assez difficile et il éxige des hypothèses plus forts qu'auparavant pour être traité par les intégrales le Roux. On peut le ramener aussi à l'équation du type (28). La solution reçue est locale. Les épreuves de la prolonger à l'aide de la solution du problème de Picard généralisé ne donnent pas des résultats car chaque fois la régularité de la solution baisse.

§ 3. Le problème de Goursat pour l'équation de l'ordre supérieur n'a pas une réponse générale. On a traité seulement des simples cas, soit des cas particuliers d'équation partielle soit des lignes droites au lieu de courbes $\Gamma_i$ sur lesquelles on pose les conditions aux limites.

D'Adhémar prend p.ex. en 1909 ([1]) l'équation

$$z'''_{xxy}=f(x,y) \tag{29}$$

(C. Popovici s'en occupe aussi en 1947 ([10])) et cherche la solution qui se réduit aux valeurs données sur les lignes droites

$$y = x\ ,\ y = ax\ ,\ y = \beta x\ , \qquad \beta > a > 1$$

en acceptant $u(0, 0) = 0$ ce qu'on peut toujours supposer. L'intégrale générale de l'équation (29) est de la forme

$$u(x, y) = L(x) + H(y) + xG(y) + \int_0^x \left\{ \int_0^\xi \left[ \int_0^y f(s, t)\, dt \right] ds \right\} d\xi\ ,$$

où $L, H, G$ fonctions arbitraires, $L(0) + H(0) = 0$. Grâce aux conditions aux limites on en reçoit le système des équations fonctionnelles

$$\begin{aligned} L(x) + H(x) + xG(x) \quad &= (\boldsymbol{x}) \\ L(x) + H(ax) + xG(ax) &= (\boldsymbol{x}) \\ L(x) + H(\beta x) + xG(\beta x) &= (\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

d'où en éliminant p.ex. $L$ et $G$ on reçoit

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right) H(ax) + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) H(\beta x) + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\beta}\right) H(a\beta x) = (\boldsymbol{x})\ .$$

On divise cette équation par $1 - 1/a$, on y remplace $a\beta x$ par $z$, on introduit $p = 1/a$, $m = 1/\beta$ et on aboutit ainsi à l'équation fonctionnelle

(30) $$H(mz) + aH(pz) + bH( = (\boldsymbol{z})\ ,$$

où $a, b, m, p$ constantes. D'Adhémar le résout en partant des suppositions analytiques pour les fonctions données (il se sert de la méthode des approximations successives).

Il généralise ensuite ces résultats en remplaçant les lignes droites par les courbes analytiques. Il reçoit une équation encore plus compliquée que (30).

Ensuite il revient aux lignes droites mais au lieu de (29) il considère l'équation

(31) $$\left(\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = f(x, y) \qquad a \text{ constante} \neq 0\ .$$

La solution générale de cette équation est de la forme

$$u(x, y) = L(x) + H(y) + G(y - ax) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\ .$$

Profitant des conditions aux limites (données sur les droites) il reçoit trois équations fonctionnelles avec les fonctions inconnues $L, H, G$ d'où on aboutit à une équation fonctionnelle de la forme

$$\begin{aligned} G[(a - a)\beta x] - G[(\beta - a)\, ax] + G[(\beta - a)\, x] - G[(a - a)\, x] + \\ + G[(1 - a)\, ax] - G[(1 - a)\beta x] = (\boldsymbol{x})\ . \end{aligned}$$