

Z. Daróczy

Funktionalgleichungen in der Informationstheorie

In der Informationstheorie spielen die Entropien (oder die Masse der Information) eine grundlegende Rolle. Die durch Shannon definierte Entropie

$${}_1H_n(p_1, \dots, p_n) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \quad (0 \log_2 0 = 0)$$

und die Entropien der Ordnung α

$${}_\alpha H_n(p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \sum_{i=1}^n p_i^\alpha \quad (\alpha > 0, \alpha \neq 1)$$

einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{p_1, \dots, p_n\}$ ($p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$) haben charakteristische Eigenschaften, die für eine Informationsmasse gültig sein müssen. Diese Eigenschaften kann man mit Hilfe der Funktionalgleichungen formulieren. Diese Funktionalgleichungen sind nicht nur in der Informationstheorie, sondern auch in der Theorie der Funktionalgleichungen sehr interessant. In dieser Note wollen wir über diese Untersuchungen einen Bericht mit einer ausführlichen Literatur angeben.

1. CHARAKTERISIERUNGEN DER SHANNONSCHEN ENTROPIE

Die Grundaufgabe dieses Problemkreises kann man einfach formulieren. Die Entropie von Shannon ist ein reelwertiges Funktional auf der Menge aller endlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Es sei jetzt $I_n(p_1, \dots, p_n)$ ein unbekanntes Funktional, das für alle endlichen Verteilungen $\{p_1, \dots, p_n\}$ ($n = 2, 3, \dots$) definiert ist, und wir fragen, was für Bedingungen müssen für das Funktional $I_n(p_1, \dots, p_n)$ gelten, so dass die Formel

$$I_n = {}_1H_n$$

für alle Verteilungen richtig sei.

Bereits Shannon [24] gab ein Axiomensystem für die Entropie ${}_1H_n$; diese Axiomen wurden in der Arbeit [8] von Chintschin in präziser Form angegeben. Ein sehr einfaches und wichtiges Axiomensystem für die Entropie ${}_1H_n$ können wir in einer Arbeit von Faddejew [14] finden. Weitere interessanten Untersuchungen bezüglich des Axiomensystem von Faddejew findet man in den folgenden Arbeiten: Borges [6], Kendall [19], Lee [20], Rényi [22], [23], Tverberg [25]. Eine einheitliche und weiterentwickelte Untersuchung kann man in [12] lesen. Andere Axiomensysteme für die Shannonsche Entropie werden in den folgenden Arbeiten dargelegt: Aczél-Daróczy [1], Aczél-Pfanzagl [4], Chaundy-McLeod [7], Daróczy [10], [11], Pintacuda [21]. Die Beziehungen zwischen der verschiedenen Systemen werden in den Arbeiten [11] und [12] untersucht.

2. CHARAKTERISIERUNG DER ENTROPIEN POSITIVER ORDNUNG

Die einparametrische Entropienschar ${}_aH_n$ wurde erstmals in den Arbeiten von Rényi eingehend untersucht. Die Charakterisierung dieser Entropien kann man in den Arbeiten von Aczél-Daróczy [1], [2], [3], und Daróczy [9] finden. In der Arbeit [3] haben die Verf. zahlreiche Probleme aufgestellt.

3. ENTROPIEN OHNE WAHRSCHEINLICHKEIT

In der Theorie der Information ist ein wichtiges Problem, den Begriff der Information ohne Wahrscheinlichkeit zu erklären. Wir geben für diese Untersuchungen die folgenden Literatur an: Ingarden-Urbanik [15], Kampé de Fériet-Forte [16], [17], [18]. Die in diesen Arbeiten vorkommenden Funktionalgleichungen werden in [5] und [13] gelöst.

LITERATUR

- [1] J. Aczél, Z. Daróczy, *Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung und der Shannonschen Entropie*. Acta Sci. Math. Acad. Sci. Hung. **14**, 95-121 (1963).
- [2] J. Aczél, Z. Daróczy, *Sur la caractérisation axiomatique des entropies d'ordre positif y compris l'entropie de Shannon*, C. R. Acad. Sci., Paris, **257**, 1581-1584, (1963).
- [3] J. Aczél, Z. Daróczy, *Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind*. Publ. Math., Debrecen. **10**, 171-190 (1963).
- [4] J. Aczél, J. Pfanzagl, *Remarks on the Measurement of Subjective Probability and Information*. Metrika **11**, 91-105 (1966).
- [5] C. Baiocchi, *Su un sistema di equazioni funzionali connesso alla teoria dell'informazione*. Boll. Unione Mat. Italiana, **22**, 236-246 (1967).
- [6] R. Borges, *Zur Herleitung der Shannonschen Information*, Math. Zeitschr. **96**, 282-287 (1967).
- [7] T. W. Chaundy, J. B. McLeod, *On a Functional Equation*, Proc. Edinburgh. Math. Soc. **12**, 7-8 (1960-61).

- [8] A. J. Chintschin, *Der Begriff der Entropie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Arbeiten zur Informationstheorie I, Berlin 1957.
- [9] Z. Daróczy, *Über Mittelwerte und Entropien vollständiger Wahrscheinlichkeitsverteilung*. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **15**, 203-210 (1964).
- [10] Z. Daróczy, *Über eine Charakterisierung der Shannonschen Entropie*, Statistica (Bologna), **27**, 199-205 (1967).
- [11] Z. Daróczy, *Über die Charakterisierung der Shannonschen Entropie*. Colloquium on Information Theory, Debrecen 1967.
- [12] Z. Daróczy, *Az információ Shannon-féle mértékéről*. MTA III. Oszt. Közl. (1968) (im Druck).
- [13] Z. Daróczy, *Über ein Funktionalgleichungssystem der Informationstheorie*. Aequationes Mathematicae (1968) (im Druck).
- [14] D. K. Faddejew, *Zum Begriff der Entropie eines endlichen Wahrscheinlichkeitsschemas*, Arbeiten zur Informationstheorie I, Berlin 1957.
- [15] R. S. Ingarden, K. Urbanik, *Information without Probability*. Coll. Math. **9**, 281-304 (1962).
- [16] J. Kampé de Fériet, B. Forte, *Information et Probabilité*. C. R. Acad. Sci., Paris, **265**, 110-114 (1967).
- [17] J. Kampé de Fériet, B. Forte, *Information et Probabilité*. C. R. Acad. Sci., Paris, **265**, 142-146 (1967).
- [18] J. Kampé de Fériet, B. Forte, *Information et Probabilité*. C. R. Acad. Sci., Paris, **265**, 350-353 (1967).
- [19] D. G. Kendall, *Functional equations in information theory*. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie **2**, 225-229 (1964).
- [20] P. M. Lee, *On the axioms of information theory*. Ann. Math. Statist. **35**, 415-418 (1964).
- [21] N. Pintacuda, *Shannon Entropy: A More General Derivation*. Statistica (Bologna), 509-524 (1966).
- [22] A. Rényi, *On a theorem of P. Erdős and its application in information theory*, Math., Cluj, **1**, 341-344 (1959).
- [23] A. Rényi, *On measures of entropy and information*, Proc. IV. Berkeley Symp. Math. Statist. and Prob. I, 547-561. (1961).
- [24] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*. Bell. System. Techn. J. **27**, 379-423 and 623-656 (1948).
- [25] H. Tverberg, *A new derivation of the information function*. Math. Scand. **6**, 297-298 (1958).