ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
Nr. CCXXIII PRACE MATEMATYCZNE. ZESZYT 14 1969

A. Climescu

Théorèmes de transfert pour les équations fonctionnelles

Le but de la communication est la démonstration de deux théorèmes de transfert, dont voici les énoncés:

I. Soit B un semianneau de Boole, M un ensemble quelconque, φ: $M \to B$ une application qui satisfait aux conditions suivantes:

(a) $\varphi(x) \neq 0$ pour un nombre fini d'éléments $x \in M$;

(b) $\varphi(x)\varphi(y) = 0$ si $x \neq y$, $x, y \in M$.

Soit encore Φ l'ensemble de toutes les applications φ ci-dessus définies.

A toute fonction $f(x_1, x_2. \ldots, x_n)$: $M^n \to M$ on fait correspondre $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$: $\Phi^n \to \Phi$ par la construction suivante: $F = \varphi(x)$ où

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sum\limits_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)} \prod \varphi_i(x_i) \text{ si } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x\,, \\ 0 \text{ si } V_{(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq x\,. \end{cases}$$

Alors si l'on connait sur M une solution d'une équation fonctionnelle polynomiale (au sens de l'algèbre universelle), on obtient une solution sur Φ de la même équation par la construction ci-dessus décrite.

II. Soient M et A deux ensemble donnés, φ: $A \to M$, ψ: $M \to A$, ψ n'étant pas obligatoirement partout définie et

$(\varphi\psi)(y) = y$ pour tout $y \in M$ pour lequel ψ est définie. Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $A^n \to A$, on pose par définition

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \psi\Big(f\big(\varphi(y_1), \varphi(y_2), \ldots, \varphi(y_n)\big)\Big)$$

lorsque l'expression du second membre existe et F n'est pas définie pour $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in A^n$ lorsque le second membre n'existe pas.

Alors pour une classe d'équations fonctionnelles polynomiales, à toute solution connue sur M, correspond par la construction indiquée une solution de la même équation sur A, mais qui n'est pas toujours partout définie.

Cette proposition est particulièrement utile lorsque M est muni d'une structure linéaire, la linéarité étant entendue dans un sens plus général que d'habitude.