ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

Nr. CCXXIII PRACE MATEMATYCZNE. ZESZYT 14 1969

W. Maier

Funktionalgleichungen mit analytischen Lösungen

Die Punktmengen $z \equiv 0 \pmod 1$ werde angesprochen in der Schreibweise $z \in M_1$, dem linearen Punktgitter der Größenebene. Wir vollziehen die Erklärung analytischer Funktionen $w(z)$ aus einfachen Merkmalen; in einen elementaren Beispiel gelte mit $z \notin M_1$

(1) $$\mathrm{E}\, w'(z) \quad \text{und} \quad w(z) = w(z+1),$$

für

(1′) $$|Re\, z| < \frac{1}{2} \text{ aber } w(z) = \frac{1}{z} + O(z)\,.$$

Aus (1), (1′) und $m = 2, 3, \ldots$ folgt

(2) $$w(z) = \frac{1}{m} \sum^{\mathrm{mod}\, m} w\left(\frac{z+l}{m}\right).$$

Während aus (1), (1′) die Kennzeichnung der trigonometrischen Transzendenten $w(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z$ sich erschließen läßt, zeigt sich die Menge der analytischen Lösungen von (2) bei festen m als überabzählbar. Existiert etwa $\sum_1^\infty \tau_N \neq \infty$, und betrachten wir als Sonderfall von (2) die Interpolationsgleichung

$$v(z) = \frac{1}{2}\left[v\left(\frac{z}{2}\right) + v\left(\frac{z+1}{2}\right)\right]$$

so bestehen für $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$ analytische Lösungen mit natürlicher Grenze $z < \infty$ und der Darstellung

$$v(z) = \sum_1^\infty w[z(2N-1)]\,\tau_N\,.$$

Betreffend das volle Lösungssystem von (2) für vorgegebenes m siehe [2]. Aus (1), (1′) folgt $\lim\limits_{\mathrm{Im}\, z \to \infty} w(z) = -\pi i$, und daraus mit $\{z, u, z+a\} \notin M_1$ das klassische Additionstheorem zweiter Stufe in der Gestalt

$$w(z)w(a) - w(z+a)[w(z) + w(a)] = \pi^2\,.$$

In der Ebene der Größen u kann mit $\operatorname{Im}\omega \neq 0$ aus dem Vektorenpaar $\{1, \omega\}$ die volle Überdeckung durch ein Netz von Parallelegrammen vollzogen werden, so daß durch deren Ecken ein Flächengitter $\{M_2\colon u \equiv 0(1, \omega)$ bestimmt wird. Indem wir an Stelle eines Parallelstreifens der z-Ebene jetz als Grundgebiet

$$\mathfrak{G}\colon |\operatorname{Re} u| < \frac{1}{2}, \qquad |\operatorname{Im} u| < \left|\operatorname{Im}\frac{\omega}{2}\right|$$

einführen, kann ein System von Merkmalen zur Kennzeichnung einer Transzendenten $S\begin{pmatrix}xy\\u\end{pmatrix} = S(u)$ mit $u,\ z = y - \omega x \notin M_2$ durch die Existenz von

$$\frac{\partial S}{\partial u} = S' \text{ und } S(u) = e^{2\pi i x} S(u+1) = e^{2\pi i y} S(u+\omega)\,, \tag{3}$$

und für $u \in \mathfrak{G}$:

$$S(u) = \frac{1}{u} + O(1) \tag{3'}$$

gegeben werden. Für $0 < \operatorname{Im} u < \operatorname{Im}\omega$ und $z \not\equiv 0(1, \omega)$ ist

$$\frac{1}{2\pi i} S\begin{pmatrix}0z\\u\end{pmatrix} = \sum_{-}^{+} \frac{l e^{2\pi i u l}}{e^{2\pi i z} q^{2l} - 1} \tag{3''}$$

während

$$S'\begin{pmatrix}0\ z\\u\end{pmatrix} = 4\pi^2 \sum^{0<l^2} \frac{e^{2\pi i u}}{1 - e^{2\pi i z} q^{2l}} \tag{3'''}$$

für $z = 0$ gilt. Auch ist

$$S\begin{pmatrix}xy\\u\end{pmatrix} = -S\begin{pmatrix}-x & -y\\ & -u\end{pmatrix} \tag{4}$$

total ungerade; die Ausscheidung von x gegen z bringt die Einsparung eines Argumentes in

$$e^{2\pi i x u} S\begin{pmatrix}x\ y\\u\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}0\ z\\u\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}z\\u\end{pmatrix}. \tag{4'}$$

In der so vereinfachten Transzendenten geben wir $\{u, v, y, \eta\}$ unabhängig vor. Alsdann gilt ein quadratischer Additionssatz vierter Stufe und zweiten Grades

$$S\begin{pmatrix}y+\eta\\u\end{pmatrix} S\begin{pmatrix}\eta\\v-u\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}y\\u\end{pmatrix} S\begin{pmatrix}\eta\\v\end{pmatrix} - S\begin{pmatrix}y\\u-v\end{pmatrix} S\begin{pmatrix}y+\eta\\v\end{pmatrix}. \tag{4''}$$

Für $0 < \operatorname{Im}\omega$ kann die ungerade elliptische Transzendente $\vartheta_1(z, \omega) = \vartheta_1(z)$ aus einer Integralnormierung

$$(5) \quad \int_a^{a+1} \sin(\pi t)\vartheta_1(t)\,dt = e^{\pi i \frac{\omega}{2}} \quad \text{und} \quad \vartheta_1(z) = -\vartheta_1(z+1) = -e^{\pi i(2z+\omega)}\vartheta_1(z+\omega)$$

gekennzeichnet werden. Im Vergleich von (3), (3′), (5) entsteht die schon bei Kronecker vorkommende Quotientenbildung

$$(5') \qquad e^{-2\pi i x u}\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_1(z+u)}{\vartheta_1(z)\vartheta_1(u)} = S\begin{pmatrix} x\,y \\ u \end{pmatrix},$$

woraus $S\begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix}$ folgt. Die Besonderung $u = -z$ ergibt die Lage der Nullstellen von $S(u)$ durch $u \equiv -z(1, \omega)$. Mit $0 < |u| < \min\{1, |\omega + g|\}$, $g = 0(1)$, verallgemeinere (3′) zu $t_0 = -1$ und

$$(6) \qquad S\begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ u \end{pmatrix} = \sum_0^\infty (-u)^N t_N(x_1, x_2);$$

als Folge der totalen Ungeradheit erhalten wir $t_N(x_1, x_2) = (-1)^N t_N(-x_1, -x_2)$, Wählt man die fünf Argumente $\{x_\nu, \xi_\nu; u\}$ so, daß mit $t_N(x_\nu) = t_N$; $t_N(\xi_\nu) = \tau_N$.

$$S\begin{pmatrix} x_\nu \\ u \end{pmatrix} = S[x] \qquad \text{die } \{u\colon x_2 - \omega x_1,\ \xi_2 - \omega\xi_1,\ x_2 + \xi_2 - \omega(x_1 + \xi_1)\} \in M_2\,,$$

so entstehen Differentialbeziehungen wie etwa

$$(6') \qquad S[x]S[\xi] = (t_1 + \tau_1)S[x+\xi] - S'[x+\xi]$$

und

$$(6'') \quad S^2[x]S[\xi] + (zt_2 + \tau_2 - t_1^2 - zt_1\tau_1)S[zx+\xi] + (2t_1 + \tau_1)S'[x+\xi] = \tfrac{1}{2}S''[2x+\xi]\,.$$

Mit $e^{\pi i\omega} = q$ können aus (3″) bekanntlich die drei geraden $\vartheta_a(z)$ erklärt werden durch

$$\vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_2(z) = e^{\pi i z}q^{\frac{1}{4}}\vartheta_3\left(z + \frac{\omega}{2}\right); \qquad \vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_0(z)\,.$$

Alle vier zugeordneten $\vartheta(z)$ genügen der partiellen Differentialgleichung der Ausgleichsvorgänge. Weiterhin benutzen wir beim Übergang zu den elliptischen Modulfunktionen die Kürzungen $\vartheta_a(0) = \vartheta_a$; $\frac{\partial}{\partial z}\vartheta_1(z)|_0 = \vartheta_1'$. Die Argumentverdopplung der ungeraden Thetafunktion führt zum Beweis der bekannten Aussage $\vartheta_1' = \pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3$. In der Darstellung (5′) bemerken wir das Verschwinden von Zählerfaktoren, mit der Auswirkung

$$(7) \qquad S\begin{pmatrix} 0\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ 0 \\ \frac{\omega}{2} \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \\ \frac{1+\omega}{2} \end{pmatrix} = 0\,.$$

Weiterhin benötigen wir als Abkürzung die Schreibweise $\frac{1}{\pi} S\begin{pmatrix}\beta\gamma\\ \delta\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\beta\gamma\\ \delta\end{bmatrix}$, womit die Aussagen (7) in der Hauptdiagonalen einer dreireihingen Matrix gewisser Modulfunktionen unterzubringen sind

$$(7')\qquad \left\{\begin{matrix} 0 & \begin{bmatrix}\frac12\ 0\\ \frac12\end{bmatrix} = \vartheta_3^2 & \begin{bmatrix}\frac12\ \frac12\\ \frac12\end{bmatrix} = \vartheta_0^2 \\ \begin{bmatrix}0\ \frac12\\ \dfrac{\omega}{2}\end{bmatrix} = -i\vartheta_3^2 & 0 & \begin{bmatrix}\frac12\ \frac12\\ \dfrac{\omega}{2}\end{bmatrix} = -i\vartheta_2^2 \\ \begin{bmatrix}0\ \frac12\\ \dfrac{1+\omega}{2}\end{bmatrix} = -i\vartheta_0^2 & \begin{bmatrix}\frac12\ 0\\ \dfrac{1+\omega}{2}\end{bmatrix} = \vartheta_2^2 & 0 \end{matrix}\right\}.$$

Wegen (4′) (4″) besteht die doppelte Darstellung

$$(7'')\qquad \begin{bmatrix}0\ \frac12\\ \dfrac{\omega}{2}\end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix}\frac12\ \frac12\\ \frac12\end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix}\frac12\ 0\\ \dfrac{1+\omega}{2}\end{bmatrix}^2 = 0 = \begin{bmatrix}\frac12\ 0\\ \frac12\end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix}\frac12\ \frac12\\ \dfrac{\omega}{2}\end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix}0\ \frac12\\ \dfrac{1+\omega}{2}\end{bmatrix}^2$$

und zweimalige Beanspruchung von (6′) gibt mit (4), (4′), (5′)

$$\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4 + S'\begin{pmatrix}0\ 0\\ \frac12\end{pmatrix} - S'\begin{pmatrix}0\ 0\\ \omega\\ \overline{2}\end{pmatrix} = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\{t_1(\tfrac12+\varepsilon,\ \tfrac12+\varepsilon)\cdot O(1)\} = 0\,,$$

d.h.

$$\sum_0^\infty q^n r_4(n) = \vartheta_3^4 = \frac{1}{\pi^2}\left[S'\begin{pmatrix}0\ 0\\ \dfrac{\omega}{2}\end{pmatrix} - S'\begin{pmatrix}0\ 0\\ \frac12\end{pmatrix}\right],$$

was mit (3‴) die Erzeugenden der Folge $\{r_4(n)\}$ durch Reihenbildung vom Lambertschen Typ wiedergibt; r_4 selbst drückt sich vermöge geeigneter Teilersummen alsdann in endlicher Gestalt aus.

Zur entsprechenden Aussage bei

$$\vartheta_3^6 = \sum_0^\infty q^n r_6(n)$$

ist für unsere Gitterkovariante $S(u)$ zunächst eine lineare Interpolationsformel bereitzustellen. Aus (3), (3′) fließt unmittelbar für $m = 1, 2, \ldots$

$$S\begin{pmatrix}x_1 x_2\\ u\end{pmatrix} = \frac{1}{m}\sum^{\operatorname{mod} m} S\begin{pmatrix}\dfrac{x_1+k}{m}\ \dfrac{x_2+l}{m}\\ mu\end{pmatrix}.$$

Nach Ausscheidung von u verbleibt mit $x_N \not\equiv 0(1, \omega)$

$$t_N(x_1, x_2) = m^{N-2} \sum^{\mathrm{mod}\, m} t_N\left(\frac{x_1+k}{m}, \frac{x_2+l}{m}\right),$$

die wir im Sonderfall benötigen werden. Hier gilt mit $N = m = 2$

$$(8) \quad t_2(x_1, x_2) - t_2\left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}\right) = t_2\left(\frac{x_1+1}{2}, \frac{x_2}{2}\right) + t_2\left(\frac{x_1+1}{2}, \frac{x_2+1}{2}\right) + t_2\left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2+1}{2}\right).$$

Die Durchführung eines Grenzprozesses mit nullstrebigen Argumenten gelingt unter Benutzung von (5′), (6) [3] wegen

$$\lim_{x_\nu \to 0} \left\{\frac{2\pi i x_1}{x_2 - \omega x_1} - t_2(x_1, x_2)\right\} = \frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}(0),$$

so daß (8) übergeht in

$$(8') \qquad t_2(\tfrac{1}{2}, 0) + t_2(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + t_2(0, \tfrac{1}{2}) = 0.$$

Mit den Argumenttripeln

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{\omega}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{\omega}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

beanspruchen wir die Differentialaussagen in vier Zeilen

$$(8'') \quad \left\{ \begin{aligned} S^3\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{\omega}{2}} \end{pmatrix} &= -3t_2(0, \tfrac{1}{2})\, S\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{\omega}{2}} \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} S''\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{\omega}{2}} \end{pmatrix} \\ S^2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{\omega}{2}} \end{pmatrix} S\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{\omega}{2}} \end{pmatrix} &= -[2t_2(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + t_2(0, \tfrac{1}{2})]\, S\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{\omega}{2}} \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} S''\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{\omega}{2}} \end{pmatrix} \\ S^2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} S\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} &= -[2t_2(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + t_2(\tfrac{1}{2}, 0)]\, S\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} S''\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\ S^3\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} &= -3t_2(\tfrac{1}{2}, 0)\, S\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} S''\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Das System von Vorzahlen $\{-i, -i, 1, 1\}$ ermöglicht durch Addition die Ausscheidung von t_2 aus (8″) und liefert die bekannte Identität

$$\pi^3 \vartheta_3^6 = S''\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} - i S''\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{\omega}{2}} \end{pmatrix}$$

als erzeugende Funktion der arithmetischen Folge $r_6(n)$, womit die Zerlegung natürlicher Zahlen is sechs Quadrate auf Teilerpotenzsummen zurückgebracht ist.

Auch im Vergleich mit den weiterreichenden Ergebnissen von Bulygin [1] scheint die hier vorgetragene Methode der überzähligen Parameter gerechtfertigt insofern, als die Unterscheidung der Anzahlfunktionen $r_{2g}(n)$ in ihrer Abhängigkeit von der Restklasse der Zahlen $g \pmod 2$ bisher nicht genügend durchsichtig beschrieben werden konnte.

SCHRIFTTUM

[1] W. Bulygin, Bull. Ac. Imp. Sc. T. VIII, Petrograd (1914) s. 389.
[2] S. Dennler, Wiss. Zeitsch. Schiller Univ. Jena, Math. R. (1965) s. 347.
[3] W. Maier, J.r.a. Math., Bd. 164 (1931), s. 85.