

M. Kucharzewski und A. Zajtz

Funktionalgleichungen mit den Matrizenargumenten

Einleitung. Die Funktionalgleichungen mit den Matrizenargumenten treten sehr oft in verschiedenen Zweigen der Mathematik vorwiegend aber in der Algebra und in der Geometrie insbesondere in der Theorie der geometrischen Objekte auf. In der Algebra werden diese Gleichungen unter anderen auch zur Kennzeichnung der Determinanten ausgenutzt. Mit diesen Problemen beschäftigten sich viele Autoren z. B. K. Stéphanos [44], C. Carathéodory [6], S. Gołąb [12], [13], [14], G. Gáspár [7], [8], [9], [10], A. Bergman [4], [5], O. Taussky und H. Wielandt [45], S. Kurepa [37], M. Kucharzewski [51], und andere. Genaue Literaturangaben über dieses Thema enthält die Arbeit von G. Gáspár [10]. Darum werden wir hier in diese Sachen nicht eingehen.

Im folgenden möchten wir die letzten Ergebnisse über die Funktionalgleichungen darstellen, die bei der Bestimmung der linearen geometrischen Objekte auftreten. Diese haben die folgende Form

$$(1) \quad F(B \cdot A) = F(B) \cdot F(A),$$

$$(2) \quad g(B \cdot A) = F(B)g(A) + g(B).$$

A, B sind beliebige quadratische Matrizen der Ordnung n und F ist eine quadratische Matrix der Ordnung m . g ist eine Vektorfunktion mit m -Komponenten. Sie sind also folgendermassen definiert

$$A = \|A_{ik}^i\| \quad B = \|B_k^i\| \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

$$F(A) = \|F_{\beta}^{\alpha}(A)\| \quad g(A) = \|g^{\alpha}(A)\| \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, m.$$

Mit dem Punkt „ \cdot “ wird das Matrixprodukt bezeichnet.

Da die Funktion F in der zweiten Gleichung nicht auftritt, kann man die erste unabhängig von der zweiten Gleichung behandeln. Das System (1) und (2) lösen wir also folgendermassen. Man löst zuerst die Gleichung (1), dann wird die erhaltene Lösung in (2) eingesetzt und die Funktion g bestimmt.

Die Bestimmung der allgemeinen Lösung der Gleichung (1) wird als das erste und des Systems (1), (2) als das zweite Problem bezeichnet. Diese zwei Probleme können auch hinsichtlich der Definitionen — bzw. Bildmengen von F

auf verschiedene Arten geteilt werden. Und zwar, bezeichnen wir mit L_n^1 die multiplikative Gruppe aller quadratischen nichtsingulären Matrizen der Ordnung n über dem reellen Zahlkörper R und mit \tilde{L}_n^1 die multiplikative Halbgruppe aller quadratischen Matrizen der Ordnung n , so kann man folgende Möglichkeiten unterscheiden

$$(3) \quad F: L_n^1 \rightarrow L_m^1 \quad (4) \quad F: L_n^1 \rightarrow \tilde{L}_m^1$$

$$(5) \quad F: \tilde{L}_n^1 \rightarrow L_m^1 \quad (6) \quad F: \tilde{L}_n^1 \rightarrow \tilde{L}_m^1.$$

Es sei mit L_n^s die s -te differentielle Gruppe der Ordnung n bezeichnet, deren genaue Definition in dem dritten Teil dieser Arbeit gegeben wird. Eine Verallgemeinerung des Systems (1), (2), die darin liegt, dass F, g auf L_n^s definiert sind, nennen wir das verallgemeinerte System. Es hat die Form:

$$(7) \quad F(L_1 L) = F(L_1) F(L),$$

$$(8) \quad g(L_1 L) = F(L_1) g(L) + g(L_1), \quad L, L_1 \in L_n^s.$$

Die vorliegende Arbeit besteht aus drei Teilen. In diesen sind der Reihe nach die Ergebnisse über das erste und zweite Problem und über das verallgemeinerte System dargestellt.

Die Funktionalgleichungen mit den Matrizenargumenten treten auch in der Komitantentheorie auf. Sie sind aber einer anderen Natur und fassen so viele verschiedene Typen um, dass wir nicht imstande sind diese hier zu besprechen.

1. DAS ERSTE PROBLEM

§ 1. Der Fall (3) des ersten Problems ist mit der Darstellung der Gruppe L_n^1 auf L_m^1 äquivalent. Unter der Stetigkeitsvoraussetzung wurden alle Lösungen in diesem Falle von I. Schur [43] im Jahre 1928 gefunden.

Der Fall (6) wurde unter der Voraussetzung der orthogonalen Invarianz von S. Kurepa [36] im Jahre 1959 gelöst. Um dieses Ergebnis darzustellen, führen wir zuerst den Begriff der orthogonalen Invarianz ein.

Definition 1.1. Die Funktion $F(A): \tilde{L}_n^1 \rightarrow \tilde{L}_m^1$ heisst orthogonal invariant, wenn sie die Bedingung $F(Q^T A Q) = F(A)$ für alle orthogonalen Matrizen Q erfüllt.

Satz 1.1. Jede orthogonal invariante Funktion

$$F(X): \tilde{L}_n^1 \rightarrow \tilde{L}_m^1$$

die der Gleichung (1) genügt, hängt nur von der Determinante Δ der Matrix X ab. Sie hat also die Form

$$(1.1) \quad F(X) = G(\Delta),$$

genügt, hängt nur von der Determinante der Matrix X ab. Sie hat also die Form $f(X) = \varphi(\Delta)$, wo $\varphi: \tilde{L}_1^1 \rightarrow \tilde{L}_1^1$ die multiplikative Gleichung (2.4) erfüllt.

Auf eine andere Weise verallgemeinerten O. Taussky und H. Wielandt [45] im Jahre 1963 das Ergebnis von S. Golab auf die Homomorphismen der Halbgruppe S aller $n \times n$ Matrizen über dem Euklidischen (vgl. [46], S. 56) kommutativen Ring R .

Im Falle $m = n = 2$ wurden alle Lösungen der Gleichung (1) von M. Kucharzewski und M. Kuczma [28] 1963 im folgenden Satz bestimmt.

Satz 2.4. Jede Lösung $F: L_2^1 \rightarrow \tilde{L}_2^1$ der Gleichung (1) hat eine der Formen: (2.1), (2.2).

Es ist bemerkenswert, dass die drei Möglichkeiten (2.1), (2.2), (2.3) im Falle $m = n = 2$ nur zu den zwei (2.1) (2.2) zurückgeführt werden können.

§ 3. $m > n$. In diesem Falle ist es vielmehr schwerer die Lösungen der Gleichung (1) zu erhalten. Ohne irgendwelche Voraussetzungen wurde diese bisher nur in den drei Spezialfällen $n = 1, m = 2, 3$ und $n = 2, m = 3$ gelöst.

Den Fall $n = 1, m = 2$ erledigten M. Kucharzewski und M. Kuczma [27] im Jahre 1962. A. Zajtz gab im Jahre 1963 einen kürzeren und einfacheren Beweis des Satzes von M. Kucharzewski und M. Kuczma, der leider nicht publiziert wurde. Das Ergebnis lautet folgendermassen:

Satz 3.1. Jede Lösung $F: L_1^1 \rightarrow \tilde{L}_2^1$ von (1) hat die Form

$$(3.1) \quad F(\xi) = \varphi(\xi) C F_0(\xi) C^{-1},$$

wo $F_0(\xi)$ eine der niedergeschriebenen Gestalten hat

$$F_0 = \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi) & 0 \\ 0 & \varphi_2(\xi) \end{vmatrix}, \quad F_0 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha(\xi) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad F_0 = \begin{vmatrix} \kappa(\xi) & -\sigma(\xi) \\ \sigma(\xi) & \kappa(\xi) \end{vmatrix}.$$

Die Funktionen $\varphi, \varphi_i, (i = 1, 2), \alpha, \kappa, \sigma$ erfüllen die entsprechenden der folgenden Gleichungen

$$(3.2) \quad \varphi_i(\xi)\varphi_i(\eta) = \varphi_i(\xi\eta)$$

$$(3.3) \quad \alpha(\xi\eta) = \alpha(\xi) + \alpha(\eta)$$

$$(3.4) \quad \begin{cases} \kappa(\xi\eta) = \kappa(\xi)\kappa(\eta) - \sigma(\xi)\sigma(\eta) \\ \sigma(\xi\eta) = \kappa(\xi)\sigma(\eta) + \sigma(\xi)\kappa(\eta) \end{cases}$$

Im Falle $n = 1, m = 3$ bestimmten M. Kuczma und A. Zajtz [33] allgemeine Lösung $F: L_1^1 \rightarrow \tilde{L}_3^1$ von (1) im Jahre 1964. Sie hat auch die Form (3.1). Jetzt aber kann F_0 die sechs nachstehenden Gestalten annehmen

$$(3.5) \quad \begin{vmatrix} \varphi_1 & & \\ & \varphi_2 & \\ & & \varphi_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \varphi_1 & \alpha & \\ & \varphi_1 & \\ & & \varphi_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \kappa - \sigma & & \\ \sigma & \kappa & \\ & & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \\ & 1 & \alpha_1 \\ & & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_2 \\ & 1 & \alpha_1 \\ & & 1 \end{vmatrix}.$$

Die leeren Stellen sind mit Nullen auszufüllen.

