ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
CCLII PRACE MATEMATYCZNE, ZESZYT 15 1971

*Jan Chabrowski*

# Remarques sur l'unicité des solutions des équations paraboliques et elliptiques

Dans la présente note considérons la question de l'unicité pour les équations paraboliques et elliptiques dans la classe de solutions définies dans tout l'espace.

1. Soit $E_{n+1}$ l'espace-temps de points $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_n)$ et l'équation parabolique linéaire de la forme

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x) u_{x_i} - u_t = f(t, x). \tag{1}$$

On suppose que

I. Les coefficients $a_{ij}(t, x)$, $b_i(t, x)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ de l'équation (1) sont définis et bornés dans $E_{n+1}$.

II. Pour tout vecteur $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et tout $(t, x) \in E_{n+1}$ on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geqslant 0.$$

On suppose de plus que pour un $t_0$ on a ou bien les inégalités

$$f(t, x) \leqslant -k \quad (t \leqslant t_0,\ x \in E_n), \quad f(t, x) \leqslant M \quad (t > t_0,\ x \in E_n) \tag{A}$$

ou bien les inégalités

$$f(t, x) \geqslant k \quad (t \leqslant t_0,\ x \in E_n), \quad f(t, x) \geqslant M \quad (t > t_0,\ x \in E_n), \tag{A'}$$

où $k$ est une constante positive et $M$ est arbitraire, $E_n$ est l'espace euclidien à $n$ dimensions de points $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Théorème 1. *Supposons que les hypothèses I, II et les inégalités* (*A*) (*ou bien* (*A'*)) *soient satisfaites et que la fonction* $c(t, x)$ *définie dans* $E_{n+1}$ *y satisfasse à l'inégalité* $c(t, x) \leqslant C$, *C étant une constante arbitraire.*

*Alors l'équation*

$$(2) \qquad Lu+c(t,x)u=f(t,x)$$

*admet au plus une solution non négative (non positive) bornée avec ses dérivées partielles du premier ordre par rapport aux variables* $x_1, \ldots, x_n$.

Démonstration. Supposons l'existence des deux solutions $u(t,x)$ et $v(t,x)$. Posons

$$U(t,x)=u(t,x)+\varepsilon\,, \qquad V(t,x)=v(t,x)+\varepsilon\,,$$

où $\varepsilon>0$ est choisi de manière que

$$(3) \qquad c(t,x)\varepsilon+f(t,x)\leqslant -k+\varepsilon C\leqslant -\frac{k}{2} \quad (t\leqslant t_0,\ x\in E_n)\,.$$

Soit $U(t,x)=z(t,x)V(t,x)$. Il est clair que la fonction $z(t,x)$ est bornée dans $E_{n+1}$. Par un calcul simple nous obtenons

$$(4) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}z_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}\left[b_i+\frac{1}{V}\sum_{l=1}^{n}(a_{il}+a_{li})V_{x_l}\right]z_{x_i}+\frac{LV}{V}z-z_t=\frac{f}{V}\,.$$

La fonction $V$ et les dérivées $V_{x_i}$ étant bornées, les coefficients de l'équation (4) sont bornés et, de plus, on a $\frac{LV}{V}=\frac{f}{V}\leqslant -\frac{k}{2b}$ pour $t\leqslant t_0$, où $b$ est une constante positive telle que $V\leqslant b$. Il en résulte ([1], Théorème 7) que $z(t,x)=1$ dans $E_{n+1}$, donc $u(t,x)=v(t,x)$. La seconde partie du théorème se ramène à la première par la transformation $u=-w$ de la fonction inconnue.

Sous les hypothèses additionnelles sur les coefficients $a_{ij}(t,x)$ on peut démontrer l'unicité dans une classe de fonctions aux dérivées non bornées.

Nous disons qu'une fonction $u(t,x)$ définie dans $E_{n+1}$ appartient à la *classe* $L_1$ lorsqu'elle possède les dérivées partielles du premier ordre par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$ dans $E_{n+1}$ et y satisfait aux inégalités

$$|u|\leqslant C_1\,, \qquad |u_{x_i}|\leqslant C_2(r^\beta+1)\left(i=1,\ldots,n;\ r^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+t^2\right),$$

où $C_1$, $C_2$, $\beta$ sont des constantes positives.

Théorème 2. *Supposons que l'hypothèse II et les inégalités* ($A$) (*ou bien* ($A'$)) *soient satisfaites et que*

$$a_{ij}(t,x)(r^\beta+1)\leqslant A\,, \qquad |b_i(t,x)|\leqslant B\ (i,j=1,\ldots,n)$$
$$c(t,x)\leqslant C\,,$$

*où* $A$, $B$ *sont des constantes positives et* $C$ *est arbitraire.*

*Alors l'équation* (2) *admet dans la classe* $L_1$ *au plus une solution non négative* (*non positive*).

Démonstration. Soient $u$ et $v$ deux solutions non négatives appartenant à la classe $L_1$. Nous introduisons les mêmes fonctions auxiliaires $U(t, x)$, $V(t, x)$, $z(t, x)$ que dans la démonstration du théorème 1. En vertu de la définition de la classe $L_1$ la fonction $z(t, x)$ est bornée, satisfait à l'équation (4), dans laquelle les coefficients des dérivées du premier ordre, en vertu de l'hypothèse, vérifient l'inégalité suivante

$$\left|b_i+\frac{1}{V}\sum_{l=1}^{n}(a_{il}+a_{li})V_{x_l}\right| \leqslant \left(B+\frac{2}{\varepsilon}nAC_2\frac{r^\beta+1}{r^\beta+1}\right) = B+\frac{2}{\varepsilon}nAC_2 .$$

De cette inégalité il résulte que les coefficients de l'équation (4) sont bornés, donc ([1], Théorème 7) $z(t, x) = 1$.

Théorème 3. *Supposons que les hypothèses I, II soient satisfaites et que* $c(t, x) \leqslant 0$ *pour* $t \leqslant t_0$, $c(t, x) \leqslant C$ *pour* $t > t_0$ ($C$ *est une constante arbitraire*) $f(t, x) \leqslant -k$ *pour* $t \leqslant t_0$, $f(t, x) \leqslant 0$ *pour* $t > t_0$ ($f(t, x) \geqslant k$ *pour* $t \leqslant t_0$, $f(t, x) \geqslant 0$ *pour* $t > t_0$), *où* $k$ *est une constante positive.*

*Alors chaque solution bornée de l'équation* (2) *est non négative* (*non positive*) *dans* $E_{n+1}$.

Démonstration. Soit $h(t) = 1$ pour $t \leqslant t_0$ et $h(t) = 0$ pour $t > t_0$, $u(t, x)$ étant une solution bornée de l'équation (2) dans $E_{n+1}$. Choisissons $\varepsilon > 0$ de manière que l'on ait

$$f(t, x)-\varepsilon h(t)u(t, x) \leqslant 0$$

dans $E_{n+1}$. Nous avons donc l'inégalité

$$Lu+\big(c(t, x)-\varepsilon h(t)\big)u = f(t, x)-\varepsilon h(t)u \leqslant 0$$

dans $E_{n+1}$, d'où ([1] Théorème 6) nous obtenons $u(t, x) \geqslant 0$ pour $(t, x) \in E_{n+1}$.

Comme une conséquence des théorème 1 et 3 nous obtenons le suivant

Corollaire 1. *Dans les hypothèses du théorème* 3 *l'équation* (2) *admet au plus une solution bornée avec ses dérivées partielles du premier ordre par rapport aux variables* $x_1, \ldots, x_n$.

Il résulte du corollaire 1 que l'équation (1) (le cas $c(t, x) = 0$) n'admet pas des solutions bornées avec leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$ si ces coefficients et $f(t, x)$ vérifient les hypothèses du corollaire 1. En effet, dans le cas contraire $u(t, x)$ et $u(t, x)+\text{const.}$ seraient des solutions différentes ce qui est impossible d'après le corollaire 1.

2. On peut démontrer des théorèmes analogues pour les équations de la forme suivante

$$(5)\qquad Au = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} = f(x) .$$

On suppose que

I'. Les coefficients $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ $(i,j=1,\ldots,n)$ sont définis et bornés dans $E_n$.

II'. Pour tout $x \in E_n$ et tout vecteur $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant a_0|\xi|^2 \quad (a_0>0).$$

Pour un $R$ on a ou bien les inégalités

$$\text{(B)} \qquad f(x)\leqslant -k \ \ |x|\geqslant R, \quad f(x)\leqslant 0 \ \ |x|<R,$$

ou bien les inégalités

$$\text{(B')} \qquad f(x)\geqslant k \ \ |x|\geqslant R, \quad f(x)\geqslant 0 \ \ |x|<R,$$

où $k$ est une constante positive.

Nous disons qu'une fonction $u(x)$ définie dans $E_n$ appartient à la *classe* $\Lambda_1$ lorsqu'elle est de classe $C^1$ et satisfait aux inégalités

$$|u|\leqslant C_1, \quad |u_{x_i}|\leqslant C_1(|x|^\gamma+1) \quad (i=1,\ldots,n)$$

où $C_1$, $\gamma$ sont des constantes positives.

En modifiant un peu les démonstrations des théorèmes 1 et 2, à l'aide du théorème 4 de [1] on parvient aux théorèmes suivants.

Thorème 4. *Supposons que les hypothèses I, II et les inégalités (B) (ou bien (B')) soient satisfaites et que la fonction $c(x)$ définie dans $E_n$ y satisfasse à l'inégalité $c(x)\leqslant C$, où $C$ est une constante arbitraire.*

*Alors l'équation*

$$\text{(6)} \qquad \Lambda u + c(x)u = f(x)$$

*admet au plus une solution non négative (non positive) bornée avec ses dérivées partielles du premier ordre par rapport aux variables $x_1,\ldots,x_n$.*

Thorème 5. *Supposons que l'hypothèse II' et les inégalités B (ou bien (B')) soient satisfaites et que les coefficients $b_i(x)$ soient bornés,*

$$a_{ij}(x)(|x|^\gamma+1)\leqslant A, \quad c(x)\leqslant C \quad (i=1,\ldots,n),$$

*où $A$ est une constante positive et $C$ est arbitraire.*

*Alors l'équation (5) admet dans la classe $\Lambda_1$ au plus une solution non négative (non positive).*

En appliquant le théorème 3 de [1] nous obtenons le suivant

Théorème 6. *Supposons que les hypothèses I', II' soient satisfaites et que $c(x)\leqslant 0$ pour $x\in E_n$, $f(x)\leqslant 0$ pour $|x|\leqslant R$, $f(x)\leqslant -k$ pour $|x|>R$ (ou bien $f(x)\geqslant 0$ pour $|x|\leqslant R$, $f(x)\geqslant k$ pour $|x|>R$).*

*Alors chaque solution bornée de l'équation (6) est non négative (non positive).*

Les théorèmes 4 et 6 permettent d'énoncer le suivant

Corollaire 2. *Dans les hypothèses du théorème* 6 *l'équation* (6) *admet au plus une solution bornée avec ses dérivées partielles du premier ordre par rapport aux variables* $x_1, \ldots, x_n$.

## TRAVAIL CITÉ

1] J. Chabrowski, *Sur l'unicité des solutions des équations paraboliques et elliptiques*, Zeszyty Naukowe UJ, Prace Matematyczne, 13 (1969), 13—18.