ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
CCLII PRACE MATEMATYCZNE, ZESZYT 15 1971

Andrzej Lasota

Équations intégrales au contingent

INTRODUCTION

Nous considérons un système d'équations intégrales de Hammerstein

$$x_i(t) = \int_G K_i(t, s) f_i(s, x(s)) ds \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{0.1}$$

où l'on pose pour abréger $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Si les fonctions f_i et les noyaux K_i sont assez réguliers et si f_i vérifient les conditions

$$|f_i(t, x)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| + \varphi(t) \tag{0.2}$$

où les nombres a_{ij} sont suffisamment petits, par exemple si

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 M_i^2 < 1, \quad M_i^2 = \int_G \int_G K_i^2(t, s) dt ds, \tag{0.3}$$

le système (0.1) admet une solution au moins [9]. L'évaluation (0.3) et certaines d'autres bien connues ne sont pas précises. La meilleure possible évaluation des constantes a_{ij} assurant l'existence d'une solution au moins de (0.1) n'est donnée que dans les deux cas particuliers suivants: dans le cas où l'inégalité (0.2) est remplacée par la condition de Lipschitz ([1], Théorème 1) et dans celui où les noyaux K_i sont symmétriques et n'ont qu'un nombre fini des valeurs propres négatives. Nous allons essayer de trancher cette question dans le cas général et ensuite nous allons envisager le cas particulier où les noyaux K_i sont symmétriques et semi-définis positifs. Il est clair que cette hypothèse supplémentaire permet de remplacer les conditions (0.2) concernant l'application $f = (f_1, \ldots, f_n)$ par d'autres, moins restrictives. Pour $n = 1$, c'est-à-dire lorsque le système (0.1) se réduit à une seule équation, une bonne évaluation de la fonction f assurant l'existence d'une solution au moins a été établie déjà en 1930 par A. Hammerstein [2]. Ce théorème d'existence de A. Hammerstein a été généralisé ensuite par M. Golomb [1], M. A. Krasnosielski [4] et d'autres. Mais les méthodes variationelles que les auteurs mentionnés utilisaient dans leurs considérations ne sont pas effectives pour $n > 1$. Il faut par exemple y supposer [10] qu'il existe une fonction telle que

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} u(t, x_1, \dots, x_n) \tag{0.4}$$

quelques soient $t \in G$ et $x_i \in R$. La condition (0.4) est banale dans le cas $n = 1$ mais elle est très restrictive pour $n \geqslant 2$. Cette difficulté a été écartée en 1953 par A. J. Povolocki [7] par le recours à un nouveau principe topologique de M. A. Krasnosielski [4]. Dans le cas le plus simple où les noyaux K_i (symmétriques et semi-définis positifs) sont à carrés sommables les hypothèses de A. J. Povolocki concernant les fonctions f_i sont les suivantes:

(a) l'opération qui à chaque fonction $x = (x_1, \dots, x_n)$ fait correspondre la fonction $y = (y_1, \dots, y_n)$ donnée par les formules $y_i(t) = f_i\big(t, x(t)\big)$ $(i = 1, \dots, n)$ applique l'espace $\big(L^2(G)\big)^n$ dans lui même;

(b) les fonctions f_i satisfont aux inégalités

$$f_i(t, x) x_i \leqslant \beta_i x_i^2 + \varphi(t) \qquad \beta_i < \lambda_i, \qquad \varphi \in L^2(G), \tag{0.5}$$

λ_i étant la plus petite valeur propre du noyau K_i.

En raison d'un théorème de M. Vainberg [3] l'hypothèse (a) est équivalente (dans la classe de fonctions mesurables par rapport à t et continues en x) au fait qu'il existe une constante a et une fonction φ à carré sommable telles que

$$|f_i(t, x)| \leqslant a \sum_{j=1}^{n} |x_j| + \varphi(t). \tag{0.6}$$

Du théorème 3 il résultera en particulier qu'en admettant les conditions (0.6) on peut remplacer les n inégalités qui figurent dans (0.5) par une seule

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\lambda_i} f_i(t, x) \leqslant \alpha |x| + \varphi(t), \qquad 0 \leqslant \alpha < 1, \qquad \varphi \in L^2(G). \tag{0.7}$$

Dans la suite au lieu du système (0.1) nous allons considérer un autre, plus général,

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_G K_{ij}(t, s) f_j\big(s, x(s)\big) ds + h_i(t) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

À de tels systèmes mène la plupart de problèmes aux limites dans la théorie des équations différentielles ordinaires.

1. NOTATIONS

Soit R^n l'espace euclidien à n dimensions; par $|x|$, $|A|$, $r(x, A)$, $(x \in R^n;\ A \subset R^n)$ nous désignons, respectivement: la norme euclidienne de x

$$|x|^2 = x^T x, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x^T = (x_1, \dots, x_n),$$

la distance du point $(0, \ldots, 0)$ au point le plus éloigné de A,

$$|A| = \sup\{|y| : y \in A\},$$

la distance du point x à l'ensemble A,

$$r(x, A) = \inf\{|x-y| : y \in A\}.$$

L'ensemble de toutes les parties convexes fermées et non vides de R^n est désigné par $\mathrm{cf}(R^n)$. Une application F de R^n dans $\mathrm{cf}(R^n)$ est dite *semi-continue supérieurement* si les conditions

$$x_i \to x_0, \quad y_i \to y_0, \quad y_i \in F(x_i)$$

entrainent $y_0 \in F(x_0)$. Soit G un ensemble mesurable ($\mathrm{mes}\, G < \infty$) de l'espace R^m. On dit [8] qu'une application $F(t)$ de G dans $\mathrm{cf}(R^n)$ est *mesurable*, si pour tout fermé $A \subset R^n$ l'ensemble de tous les points t pour lesquels l'intersection $A \cap F(t)$ n'est pas vide est mesurable.

Donnons-nous une application $F(t, x)$ de $G \times R^n$ dans $\mathrm{cf}(R^n)$, une matrice $K(t, s)$ à n dimensions (c'est-à-dire une fonction qui applique $G \times G$ dans R^{n^2}) et une application $x(t)$ de G dans R^n; soit

$$\Big\{\int_G K(t, s) F\big(s, x(s)\big) ds\Big\}$$

l'ensemble de toutes les applications mesurables $y(t)$ de G dans R^n pour lesquelles il existe une application mesurable $u(t)$ satisfaisant aux conditions

$$y(t) = \int_G K(t, s) u(s) ds, \quad u(t) \in F\big(t, x(t)\big) \quad (t \in G).$$

2. THÉORÈME GÉNÉRAL

Une fonction $x(t)$ qui vérifie la condition

$$\{x(t)\} \in \Big\{\int_G K(t, s) F\big(s, x(s)\big) ds\Big\} \tag{2.1}$$

sera appelée *solution* de l'équation intégrale au contingent (2.1). A côté de l'équation au contingent (2.1) nous allons envisager l'équation intégrale au sens usuel,

$$x(t) = \int_G K(t, s) f\big(s, x(s)\big) ds + h(t), \tag{2.2}$$

où $f(s, t)$ et $h(t)$ désignent des fonctions à valeurs dans l'espace R^n.

L'espace des applications $x(t)$ de G dans R^n pour lesquelles $|x(t)|^p$ est sommable, munie de la norme $\|x\|_{L^p} = \big(\int_G |x(t)|^p dt\big)^{1/p}$, sera notée $L^p_n(G)$.

Théorème 1. *Soit* $F(t, x)$ *une application de* $G \times R^n$ *dans* $\mathrm{cf}(R^n)$ *mesurable en* t, *semi-continue supérieuremant et homogène en* x $(F(t, \lambda x) = \lambda F(t, x)$ *pour* $\lambda \in R)$ *et telle que* $\sup\{|F(t, x)| : t \in G,\ |x| = 1\}$ *soit fini. Supposons de plus que* $f(t, x)$ *soit une application de* $G \times R^n$ *dans* R^n *mesurable en* t, *continue en* x, *et satisfaisant à la condition*

$$\text{2.3)} \qquad r\big(f(t, x), F(t, x)\big) \leqslant m(t) + o(|x|) \qquad m \in L_1(G)$$

et que $K(t, x)$ *et* $h(t)$ *appartiennent à l'espace* $L^2_{n^2}(G \times G)$ *et* $L^2_n(G)$ *respectivement. Si l'équation* (2.1) *n'a dans l'espace* $L^2_n(G)$ *que la solution nulle, il existe au moins une solution* $x \in L^2_n(G)$ *de l'équation* (2.2).

Démonstration. En posant

$$\hat{F}(x) = \Big\{\int_G K(t, s) F\big(s, x(s)\big) ds\Big\}, \qquad \hat{f}(x)(t) = \int_G K(t, s) f\big(s, x(s)\big) ds + h(t)$$

on peut écrire les équations (2.1), (2,2) dans la forme

$$x \in \hat{F}(x), \qquad x = \hat{f}(x).$$

Il est clair (cfr. [3]) que dans nos hypothèses $\hat{f}$ est une application complètement continue de $L^2_n(G)$ dans lui-même. On peut aussi prouver (cfr. [6]) que $\hat{F}$ est une application semi-continue supérieurement et compacte de $L^2_n(G)$ dans $\mathrm{cf}\big(L^2_n(G)\big)$. De l'inégalité (2.3) il vient que ces applications satisfont à la condition

$$\lim \frac{\varrho\big(\hat{f}(x), \hat{F}(x)\big)}{\|x\|_{L^2}} = 0, \qquad \|x\|_{L^2} \to \infty$$

où ϱ désigne la distance définie à l'aide de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ dans l'espace $L^2_n(G)$. Enfin, dans nos hypothèses l'équation homogène $x \in \hat{F}(x)$ n'a que la solution nulle.

Donc pour achever la démonstration il suffit de faire recours au théorème généralisé de Fredholm ([5], Théorème 1.1).

3. APPLICATIONS

Le lemme suivant est une simple généralisation d'un théorème de M. Golomb ([1], Satz 1) concernant le système d'équations intégrales (2.2).

Lemme 1. *Si* $K \in L^2_{n^2}(G \times G)$ *et* $F(t, x) = \{y \in R^n : |y| \leqslant \alpha|x|\}$ $(\alpha^2 < \mu_1)$ *où* μ_1 *désigne la plus petite valeur propre* du noyau*

$$(3.1) \qquad K_1(t, s) = \int_G K(t, u) K^T(s, u) du,$$

l'équation au contingent (2.1) *admet dans l'espace* $L^2_n(G)$ *seulement la solution nulle.*

---

* C'est-à-dire la plus petite valeur propre de l'équation $x(t) = \lambda \int_G K_1(t, s) x(s) ds$ $\big(x \in L^2_n(G)\big)$.

Démonstration. Soit $\{p_i(t)\}$ la suite normée $\left(\|p_i(t)\|_{L^2} = 1\right)$ des fonctions propres du noyau K_1 et soit $\{\mu_i\}$ la suite correspondant de valeurs propres. Posons, suivant E. Schmidt,

$$q_i(t) = \lambda_i \int_G K^T(s,t) p_i(s) ds \quad \lambda_i = \sqrt{\mu_i} \quad (i = 1, 2, \ldots):$$

On obtient de cette façon la suite normée $\{q_i(t)\}$ des fonctions propres du noyau

$$K_2(t,s) = \int_G K^T(u,t) K(u,s) du$$

et on a de plus

$$p_i(t) = \lambda_i \int_G K(t,s) q_i(s) ds \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Désignons par $x(t)$ une solution de l'équation au contingent (2.1); il existe alors une fonction $u(t)$ satisfaisant aux conditions

$$x(t) = \int_G K(t,s) u(s) ds, \quad |u(t)| \leqslant \alpha |x(t)|.$$

La solution $x(t)$ peut être écrite dans la forme

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i p_i(t)$$

où

$$C_i = \int_G x^T(t) p_i(t) dt = \int_G \int_G u^T(s) K^T(t,s) p_i(t) ds dt = \frac{1}{\lambda_i} \int_G u^T(s) q_i(s) ds.$$

En vertu de l'inégalité de Bessel il en vient

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 \lambda_i^2 \leqslant \int_G |u(t)|^2 dt \leqslant \alpha^2 \int_G |x(s)|^2 ds = \alpha^2 \sum_{i=1}^{\infty} C_i^2.$$

Mais $\lambda_i \geqslant \lambda_1 > \alpha$ ce qui montre que tous les coefficients C_i sont nuls.

Théorème 2. *Si $K \in L^2_{n^2}(G \times G)$, $h \in L^2_n(G)$ et si l'application $f(t,x)$ de $G \times R^n$ dans R^n, mesurable en t et continue en x, satisfait à l'inégalité*

$$(3.2) \qquad |f(t,x)| \leqslant \alpha |x| + \varphi(t), \quad \alpha^2 < \mu_1, \quad \varphi \in L^2_1(G)$$

où μ_1 désigne la plus petite valeur propre du noyau (3.1), *l'équation* (2.2) *admet dans l'espace $L^2_n(G)$ une solution au moins.*

En effet, en posant $F(t,x) = \{y \in R^n : |y| \leqslant \alpha |x|\}$, d'après (3.2) on obtient

$$r\big(f(t,x), F(t,x)\big) \leqslant \varphi(t)$$

et notre théorème résulte immédiatement du lemme 1 et du théorème 1