

Mieczysław Kucharzewski, Andrzej Zajtz

Eine kanonische Form der pseudostochastischen Matrizen

Einleitung. Eine Matrix A mit n Zeilen und m Spalten über dem reellen Zahlkörper R , $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, $a_{ij} \in R$ heisst stochastisch, wenn sie die Bedingungen

$$(1) \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(2) \quad a_{ij} \geq 0$$

erfüllt (vgl. [1], S. 381).

Wir verallgemeinern den Begriff der stochastischen Matrix und zwar auf folgende Weise.

Definition 1. Eine Matrix A über einem kommutativen Körper K heisst pseudostochastisch, wenn sie nur die Bedingung (1) erfüllt.

Die stochastischen bzw. pseudostochastischen Matrizen werden kurz S- bzw. PS-Matrizen genannt. Die Menge aller PS-Matrizen werden wir mit $S(n, m, K)$ bezeichnen.

Eine Zeile einer Matrix hat kanonische Form, wenn genau ein Element dieser Zeile gleich Eins ist und alle anderen gleich Null sind. Hat jede Zeile einer Matrix A kanonische Form, so werden wir diese Matrix mit

$$(3) \quad E(i_1, i_2, \dots, i_n), \quad 1 \leq i_k \leq m, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

bezeichnen, wobei das Symbol i_k bedeutet, dass eben das Element a_{ki_k} gleich Eins ist: $a_{ki_k} = 1$.

Definition 2. Eine Matrix A hat eine kanonische Form, wenn

(4) jede Zeile der Matrix A eine kanonische Form hat,

(5) die in (3) definierten Indizes den Bedingungen

$$i_1 = 1, \quad i_k \leq i_{k+1} \leq i_k + 1, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

genügen.

In der vorliegenden Note wird ein Satz über die kanonische Form der PS-Matrizen bewiesen (Satz 3.1, § 3). Dieser Satz spielt eine grundlegende Rolle bei der Bestimmung allgemeiner Lösung der multiplikativen Funktionalgleichung für S- und PS-Matrizen. Die Lösungen werden in nächsten Arbeiten bestimmt. In § 1 und § 2 führen wir einige Definitionen, Bezeichnungen und Hilfssätze ein, die im weiteren nötig sind. § 3 enthält den oben erwähnten Hauptsatz und § 4 — einige Bemerkungen und Folgerungen aus diesem Satz. Im § 5 werden einige Eigenschaften der S-Matrizen bewiesen.

§ 1. Es sei e ein Vektor, dessen alle Komponenten gleich Eins sind, $e = (1, 1, \dots, 1) \in K^n$. Eine Matrix A ist dann und nur dann pseudostochastisch, wenn e ein Eigenvektor der Matrix mit dem Eigenwert 1 ist, d.h. wenn die Relation

$$(1.1) \quad A \cdot e = e,$$

gilt, (vgl. [1], S. 382). Daraus erhalten wir die folgenden Hilfssätze.

Hilfssatz 1.1. *Das Produkt zweier PS-Matrizen, wenn es existiert, ist eine PS-Matrix und die zu einer pseudostochastischen inverse Matrix, wenn sie existiert, ist auch pseudostochastisch.*

Der Beweis folgt aus den nachstehenden Betrachtungen:

$$Ae = e \wedge Be = e \wedge B \cdot A \text{ existiert} \Rightarrow B \cdot A \cdot e = B \cdot e = e,$$

$$A \cdot e = e \wedge A^{-1} \text{ existiert} \Rightarrow A^{-1} \cdot e = e.$$

Hilfssatz 1.2. *Die Menge aller regulären PS-Matrizen derselben Ordnung n mit der Matrixmultiplikation bildet eine Gruppe. Diese wird mit $S(n, K)$ bezeichnet.*

Hilfssatz 1.3. *Die Menge aller PS-Matrizen derselben Ordnung n mit der Matrixmultiplikation bildet eine Halbgruppe mit Einheitsselement. Wir bezeichnen diese mit $\tilde{S}(n, K)$.*

Jetzt definieren wir zwei weitere Begriffe und zwar der Permutationsmatrizen und der elementaren PS-Matrizen.

Definition 1.1. Eine Matrix, die entsteht, wenn wir die i -te und k -te Zeile in der Einheitsmatrix vertauschen, nennen wir Permutationsmatrix und wollen sie mit P_{ik} bezeichnen (vgl. [2], S. 188).

Definition 1.2. Mit $F_{ik}(\beta)$, $\beta \neq 0$, werden wir eine PS-Matrix bezeichnen, die entsteht, wenn die i -te Zeile der Einheitsmatrix durch die folgende

$$(0, \dots, 0, \overset{(i)}{\beta}, 0, \dots, 0, \overset{(k)}{1-\beta}, 0, \dots, 0), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq n, \quad i \neq k$$

ersetzt wird. $F_{ik}(\beta)$ nennen wir elementare PS-Matrix.

§ 2. Elementare pseudostochastische Umformungen der Matrizen.

Definition 2.1. *Jede der folgenden zwei Umformungen heisst elementare pseudostochastische Umformung.*

$U_1 R(LU_1)$: *Multiplizieren einer Matrix rechtsseitig (linksseitig) mit einer elementaren PS-Matrix.*

$\bar{U}_2 R(LU_2)$: Rechtsseitiges (linksseitiges) Multiplizieren einer Matrix mit einer Permutationsmatrix.

Aus dem Hilfssatz 1.1 folgt, dass PS-Matrix bei jeder pseudostochastischen elementaren Umformung in die pseudostochastische übergeht.

Jetzt werden einige Hilfssätze über das Verhalten der PS-Matrizen bei den pseudostochastischen elementaren Umformungen gegeben.

Hilfssatz 2.1. Erfüllen zwei verschiedene Elemente der i -ten Zeile einer Matrix A die Relationen

$$(2.1) \quad a_{ij} + a_{ik} \neq 0,$$

$$(2.2) \quad a_{ij} \neq 0, \quad j \neq k,$$

so kann A mit Hilfe von einer $U_1 R$ in A übergeführt werden, in der das Element \tilde{a}_{ik} gleich Null ist,

$$(2.3) \quad \tilde{a}_{ik} = 0.$$

Beweis. Wir multiplizieren A rechtsseitig mit $F_{jk}(\beta)$. Dann nimmt die i -te Zeile von A die Form

$$(a_{i1}, \dots, \beta a_{ij}, \dots, a_{ik} + (1 - \beta)a_{ij}, \dots, a_{in}),$$

an. Setzt man $\beta = \frac{a_{ij} + a_{ik}}{a_{ij}}$, was auf Grund (2.2) gestattet ist, so erhält man wegen

(2.1), $\beta \neq 0$. Daraus folgt $\tilde{a}_{ik} = a_{ik} + (1 - \beta)a_{ij} = 0$, womit ist der Hilfssatz 2.1 bewiesen.

Es ist zu bemerken, dass sich bei dieser Umformung nur die Elemente der j -ten und k -ten Spalte der Matrix A ändern.

Hilfssatz 2.2. Gibt es wenigstens drei Elemente der i -ten Zeile a_{ij} , a_{ik} , a_{il} einer Matrix A von Null verschieden, so kann die Anzahl der von Null verschiedenen Elemente dieser Zeile mit Hilfe von einer $U_1 R$ wenigstens um Eins verkleinert werden. Bei der Umformung ändern sich höchstens Elemente der Spalten j , k , l .

Der Beweis folgt ohne weiteres aus der Bemerkung, dass wenigstens zwei unter den Elementen a_{ij} , a_{ik} , a_{il} die Relationen (2.1) und (2.2) erfüllen müssen. Auf Grund des Hilfssatzes 2.1 kann A mit Hilfe von einer $U_1 R$ in A übergeführt werden, in der wenigstens ein der Elemente \tilde{a}_{ij} , \tilde{a}_{ik} , \tilde{a}_{il} gleich Null ist. Bei dieser Umformung werden höchstens Elemente der Spalten j , k , l , verändert.

Hilfssatz 2.3. Hat jede Zeile einer Matrix kanonische Form, so kann die Matrix mit Hilfe der Umformungen LU_2 und $U_2 R$ in kanonische Form übergeführt werden.

Beweis. Besitze die Matrix die Form (3). Durch entsprechende Vertauschung der Zeilen und Spalten kann man eine Matrix bilden, in der die Indizes i_1, i_2, \dots, i_n der Ungleichung (5) genügen. Da die Vertauschung der Zeilen (Spalten) mit $LU_2(U_2 R)$ äquivalent ist, folgt daraus der Hilfssatz 2.3.

Hilfssatz 2.4. Ist ein Element der Matrix A gleich Eins, so kann A mit Hilfe einer Umformung LU_1 in eine solche übergeführt werden, in der alle Elemente derselben Spalte entweder gleich Eins oder gleich Null sind.

