

*Andrzej Pelczar*

**La stabilité des ensembles dans des systèmes  
pseudo-dynamiques locaux**

Résumé de la conférence donnée le 11 février 1974 à l'Université  
de Liège

1. Soit  $(G, +)$  un semi-groupe commutatif, avec  $0$  (l'élément neutre), soit  $X$  un ensemble non-vidé et soit  $A$  un sous-ensemble de  $G \times X$  tel que:

$$\{0\} \times X \subset A$$

Pour  $x \in X$  posons:

$$(1) \quad I_x \stackrel{\text{df}}{=} \{s \in G : (s, x) \in A\}.$$

Observons que  $0 \in I_x$  pour chaque  $x \in X$ , alors  $I_x \neq \emptyset$  pour  $x \in X$ .

Définition 1. Un système pseudo-dynamique local (en bref: PDL-système) est un quadruple  $(X, G, A; \pi)$  formé d'un triplet  $(X, G, A)$  avec les ensembles  $X, A$  et le semi-groupe  $G$ , introduit ci-dessus, et d'une application

$$\pi : A \rightarrow X$$

satisfaisant aux axiomes suivants:

$$(2) \quad \pi(0, x) = x \text{ pour chaque } x \in X$$

$$(3) \quad \text{si } t \in I_x \text{ et } s \in I_{\pi(t, x)} \text{ alors } t+s (= s+t) \in I_x$$

$$(4) \quad \pi(s, \pi(t, x)) = \pi(s+t, x) \text{ pour chaque } x \in X, t \in I_x, s \in I_{\pi(t, x)}.$$

Posons

$$(5) \quad \pi(x) = \{\pi(t, x) : t \in I_x\} \text{ pour } x \in X$$

$$(6) \quad \pi(B) = \{\pi(t, x) : x \in B, t \in I_x\} \text{ pour } B \subset X$$

Définition 2. On dit qu'un ensemble  $M \subset X$  ( $M \neq \emptyset$ ) est invariant (par rapport à  $\pi$ ) si et seulement si

$$\pi(M) \subset M$$

Pour  $x \in X$ , l'ensemble  $\pi(x)$  est appelé la trajectoire de  $x$ . Il est clair que chaque trajectoire est invariante.

2. Soit  $\mathcal{F}(X)$  la famille de tous les sous-ensembles de  $X$ .

Définition 3. On dit qu'une sous-famille  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{F}(X)$  est une base (dans  $X$ ) si et seulement si

$$(7) \quad \mathcal{A} \neq \emptyset, \emptyset \notin \mathcal{A}$$

$$(8) \quad \text{si } A, B \in \mathcal{A}, \text{ alors il existe un ensemble } D \in \mathcal{A} \text{ tel que } D \subset A \cap B.$$

Remarque 1. La définition ci-dessus est introduite dans les cours universitaires de M. S. Łojasiewicz à l'Université de Cracovie.

Définition 4. Supposons que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  soient deux bases dans  $X$ . On dit que  $\mathcal{A}$  est plus forte que  $\mathcal{B}$  (on note:  $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$ ) si et seulement si

$$(9) \quad \text{pour chaque } B \in \mathcal{B} \text{ il existe } A \in \mathcal{A}, \text{ tel que } A \subset B.$$

3. Supposons que  $(X, A, G; \pi)$  est un PDL-système, et qu'on a une application

$$(10) \quad \beta : X \ni x_1 \rightarrow \mathcal{B}_x \subset \mathcal{F}(X)$$

telle que pour chaque  $x \in X$ ,  $\mathcal{B}_x$  soit une base dans  $X$  avec  $x \in B$  pour chaque  $B \in \mathcal{B}_x$ .

Soit  $\Omega$  une base dans  $X$  et soit  $M (\neq \emptyset)$  un sous-ensemble de  $X$ .

Définition 5. (voir [2]). On dit que  $M$  est stable (au sens de Liapounov) par rapport à  $\Omega$  et  $\beta$  (en bref,  $M$  satisfait la condition  $S(N; \beta)$ ) si et seulement si, pour chaque  $Q \in \Omega$  et chaque  $x \in M$ , il existe  $B \in \mathcal{B}_x$ , tel que

$$(11) \quad \text{si } z \in B, \text{ alors } \pi(z) \subset Q.$$

Remarque 2. Soit  $(X, \rho)$  un espace métrique. Posons pour  $\varepsilon > 0$   $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$  et  $B(M, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(y, M) < \varepsilon\}$  (où  $M \subset X$ ,  $M \neq \emptyset$ );  $\rho(y, M) = \inf\{\rho(y, z) : z \in M\}$ . Si on pose  $\Omega = \{B(M, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$  et  $\mathcal{B}_x = \{B(x, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$  alors  $M$  satisfait la condition  $S(\Omega; \beta)$  si et seulement si il est stable au sens ordinaire: pour chaque  $\varepsilon > 0$  et pour chaque  $x \in M$ , il existe  $\delta > 0$ , tel que si  $y \in B(x, \delta)$ , alors  $\rho(\pi(t, y), M) < \varepsilon$  pour  $t \in I_y$ . Si on pose  $\Omega = \{B(M, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0} = \mathcal{B}_x$  pour chaque  $x \in X$ , alors  $M$  satisfait la condition  $S(\Omega; \beta)$  si et seulement si il est uniformément stable.

Définition 6. (voir [2]). On dit que l'ensemble  $M$  satisfait la condition  $L(\Omega; \beta)$  si et seulement si il existe une base  $\mathcal{A}$  dans  $X$ , telle que:

$$(12) \quad \mathcal{B}_y \succ \mathcal{A} \text{ pour } y \in M$$

$$(13) \quad \mathcal{A} \succ \Omega$$

$$(14) \quad \text{si } A \in \mathcal{A}, \text{ alors } A \text{ est invariant.}$$

Théorème 1. (voir [2] pour une version globale). Les conditions  $S(\Omega; \beta)$  et  $L(\Omega; \beta)$  sont équivalentes.

### Démonstration

I. Soit  $M$  satisfaisant à la condition  $I(\Omega; \beta)$ . Si  $y \in M$  et  $Q \in \Omega$  sont donnés, alors on trouve  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $A \subset Q$  et  $B \in \mathcal{B}_y$  tel que  $B \subset A$ ; il est facile de montrer que si  $z \in B$ , alors  $\pi(z) \subset Q$ .

II. Supposons  $S(\Omega; \beta)$ . On pose pour  $D \subset X$ .

$$(15) \quad E(D) = \{z \in X : \pi(z) \subset D\}$$

Evidemment  $E(Q) \neq \emptyset$  pour  $Q \in \Omega$ . On vérifie que la famille

$$(16) \quad \mathcal{E} = \{E(Q)\}_{Q \in \Omega}$$

est une base, et qu'elle satisfait (12)—(14) (où  $\mathcal{A}$  est remplacé par  $\mathcal{E}$ ).

4. Soit  $(X, G, A; \pi)$  un PDL-système,  $M \neq \emptyset$ ,  $M \subset X$  et soit  $(T, \leq)$  un espace partiellement ordonné. Soit  $W$  un sous-ensemble invariant et non-vide de  $X$  tel que  $M \subset W$ . Posons  $P = T \setminus \{\inf T\}$  (s'il n'existe pas d' $\inf T (= \min T)$ , alors  $P = T$ ).

Définition 7. Une application

$$(17) \quad V : W \rightarrow T$$

est appelée la fonction de Liapounov du type  $L(W, P; \Omega; \beta)$  si et seulement si la famille

$$(18) \quad \mathcal{A} = \{A_\lambda : \lambda \in P\}$$

où

$$(19) \quad A_\lambda = \{y \in W : V(y) \leq \lambda\}$$

est une base satisfaisant aux conditions (12) et (13) avec, en plus,

$$(20) \quad V(\pi(t, y)) \leq V(y) \text{ pour } y \in W \text{ et } t \in I_y.$$

Remarque 3. La condition (20) implique (14).

Théorème 2. Si  $M \neq \emptyset$ ,  $M \subset W \subset X$  et s'il existe une fonction de Liapounov du type  $L(W, T; \Omega; \beta)$  où  $W$  est invariant, alors  $M$  est stable par rapport à  $\Omega$  et  $\beta$ . La démonstration est triviale (voir Remarque 3).

5. Théorème 3. Soient  $(X, G, A; \pi)$  un PDL-système (on a une application (10)),  $M (\neq \emptyset)$  un sous-ensemble de  $X$ ,  $(T, \leq)$  un espace partiellement ordonné tel que pour chaque  $S \subset T$ ,  $S \neq \emptyset$ , l' $\inf S$  existe, une base  $\Omega \subset \mathcal{F}(X)$  telle que  $\Omega = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in P}$  ( $P = T \setminus \{\inf T\}$ ) où si  $\lambda \leq \eta$ , alors  $Q_\lambda \subset Q_\eta$ . Supposons que si:  $\eta, \lambda \in T$  et  $\eta, \lambda > \inf T$ , alors  $\inf\{\lambda, \eta\} > \inf T$ . Sous ces hypothèses, si  $M$  est stable par rapport à  $\Omega$  et  $\beta$ , alors il existe un sous-ensemble  $W$  de  $X$  invariant, tel que:

(21) pour chaque  $y \in M$ , il existe  $B \in \mathcal{B}_y$ , tel que  $B \subset W$  et il existe une fonction de Liapounov du type  $L(W, P; \Omega; \beta)$ .

Démonstration. On pose

(22).  $W = \{x \in X : \pi(x) \subset Q_\sigma\}$  où  $\sigma \in P$  est arbitrairement fixé, et

(23)  $V(y) = \inf\{\lambda \in T : \pi(y) \subset Q_\lambda\}$  pour  $y \in W$ .

Nous montrons seulement la décroissance de  $V$  selon les trajectoires. On a :  $z \in \pi(y)$  si et seulement si  $z = \pi(t, y)$  avec un certain  $t \in I_y$ ; par conséquent, si  $z \in \pi(y)$  alors  $\pi(z) \subset \pi(y)$ . Alors, pour chaque  $y \in M$  et  $t \in I_y$ , on a :

$$V(\pi(t, y)) = \inf\{\lambda : \pi(\pi(t, y)) \subset Q_\lambda\} \leq \inf\{\lambda : \pi(y) \subset Q_\lambda\} = V(y).$$

6. Soient  $(X, G, A; \pi)$  un PDL-système,  $M \subset X$  et  $M \neq \emptyset$ ,  $\beta$  défini par (10) et  $(T, \leq)$  un espace partiellement ordonné tel que pour chaque  $S \subset T$ ,  $S \neq \emptyset$ , l'inf  $S$  existe. Supposons en plus que  $\Omega$  et  $A$  soient deux bases dans  $X$ , telles que  $M \subset Q$  et  $M \subset L$  pour chaque  $Q \in \Omega$  et chaque  $L \in A$ .

Définition 8. On dit que l'ensemble  $M$  est attractif par rapport au couple  $(\Omega, A)$  des bases  $\Omega$  et  $A$  si et seulement si il existe  $Q \in \Omega$  tel que pour chaque  $x \in Q$  et chaque  $L \in A$  il existe un  $t \in I_x$ , tel que  $\pi(\pi(t, x)) \subset L$ . (C'est-à-dire que  $\pi(t+s, x) \in L$  si  $s \in G$ ,  $t+s \in I_x$ ).

Définition 9. On dit que l'ensemble  $M$  est asymptotiquement stable par rapport à  $(\Omega, A; \beta)$  si et seulement si  $M$  est stable par rapport à  $\Omega$  et  $\beta$  (au sens de la définition 5) et il est attractif par rapport à  $(\Omega, A)$ .

Théorème 4. Supposons toutes les hypothèses introduites et rappelées ci-dessus. Supposons qu'il existe une fonction de Liapounov  $V : W \rightarrow T$  du type  $(L(W, P; \Omega; \beta))$  (avec un certain sous-ensemble  $W$  de  $X$ , invariant satisfaisant (21)), telle que

(24) pour chaque  $y \in W \setminus M$  et chaque  $\lambda \in P$  il existe  $t \in I_y$  tel que  $V(\pi(t, y)) \leq \lambda$ .  
Supposons finalement que

(25)  $\mathcal{A} \succ A$

où  $\mathcal{A}$  est donné par (18) et (19) et qu'il existe  $Q \in \Omega$ , tel que  $Q \subset W$ . Sous ces hypothèses, l'ensemble  $M$  est asymptotiquement stable.

Démonstration. La stabilité de  $M$  est triviale (voir Théorème 2.). On va montrer que  $M$  est attractif. Soit  $Q \in \Omega$  un ensemble contenu dans  $W$ . Soit  $L \in A$  arbitrairement fixé, et soit  $x$  un point de  $Q$ . Pour  $L$ , on trouve  $\lambda \in L$ , tel que  $A_\lambda \subset L$ , c'est-à-dire que :

$$V(y) \leq \lambda \rightarrow y \in L.$$

D'autre part, pour  $\lambda$  on trouve  $t \in I_y$  tel que

$$V(\pi(t, y)) \leq \lambda$$

On sait que si  $z \in X$  et  $s \in I_z$ , alors

$$V(\pi(s, z)) \leq V(z)$$

Mais, pour  $z = \pi(t, y)$ , on a

$$\pi(s, z) = \pi(t+s, y)$$

et nous avons

$$V(\pi(t+s, y)) \leq V(\pi(t, y)) \leq y$$

et finalement

$$\pi(t+s, y) \in L \text{ pour } s \in I_{\pi(t, y)}.$$

La démonstration est terminée.

7. On peut considérer d'autres propriétés du type de la stabilité et de l'attraction dans le même cadre; voir pour versions globales [2] et [3]. Notre définition d'un PDL-système est une modification d'une définition de Bhatia et Hajek [1] (et en même temps d'une définition de [2]).

Supplement. Certain très général notion de la stabilité a été donnée par P. Seibert dans [5]. Je remercie Monsieur P. Habets qui m'en a informé sur le travail [5] après ma conférence à Liège le 11 février 1974; ce travail n'a pas connu à moi, avant. L'autre général notion de la stabilité on peut trouver dans [4]. Je remercie Monsieur Claude Demuth de l'Université de Liège pour l'aide au cour de la rédaction de ce travail.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. P. Bhatia et O. Hajek, *Local Semi-Dynamical Systems*, Berlin—Heidelberg—New York 1969. (Lectures Notes in Mathematics, n° 90).
- [2] A. Pelczar, *Stability of Sets in Pseudo-dynamical Systems*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 19 (1971), 13—17.
- [3] —, *Stability of Sets in Pseudo-dynamical Systems*, III, Ibidem, 20 (1972), 673—677.
- [4] J. Auslander, *On Stability of Closed Sets in Dynamical Systems*, Sem. Diff. Equat. Dynam. Syst., II, Maryland 1969 (Lecture Notes in Mathematics N° 144), 1—4.
- [5] P. Seibert, *A General Theory of Liapunov Stability*, Ordinary Differential Equations, 1971, NRL-MRC Conference, Ed. L. Weiss, Acad. Press, New York—London 1972, 563—568.