

Lech Anczyk

Solutions spéciales des quelques équations fonctionnelles

1. Dans la présente note nous considérons quelques cas de l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad \varphi(f(x)) = g(x, \varphi(x))$$

où la fonction φ est inconnue, la variable x est réelle, toutes les fonctions dans (1) sont réelles et définies dans un intervalle $I = \langle 0, a \rangle$, $a > 0$.

Définition. Soit α un nombre réel. Nous désignons par U^α la classe de fonctions φ qui sont définies et positives dans un intervalle de la forme $(0, \delta)$ et pour lesquelles la limite $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\alpha} \varphi(x)$ existe et est un nombre positif (cf. [3]).

Dans [1], [2] on a considéré les solutions dans la classe U^α d'une généralisation de l'équation de Böttcher

$$\varphi(f(x)) = (\varphi(x))^p, p > 1.$$

Le but du travail présent est de prouver des théorèmes sur l'unicité des solutions dans la classe U^α pour des équations plus générales que celle traitée dans [1], [2], à savoir les équations du type (1) où la fonction g est de la forme

$$g(x, y) = h(x)g(y)$$

où

$$g(x, y) = y^{l(x)}k(x, y).$$

Dans nos considérations nous nous servons d'un lemme concernant les solutions ψ de l'équation

$$(2) \quad \psi(x) = w(x, \psi(f(x))).$$

Afin de formuler le lemme nous admettons les hypothèses suivantes:

1° la fonction f définie dans l'intervalle $\langle 0, a \rangle$ est là continue et $0 < f(x) < x$ pour tout $x \in (0, a)$;

2° la fonction w est définie dans un voisinage du point $(0, \eta)$ tel que $w(0, \eta) = \eta$ et elle y satisfait à l'inégalité

$$|w(x, y_1) - w(x, y_2)| \leq \vartheta |y_1 - y_2|, 0 < \vartheta < 1;$$

en outre, la fonction $x \rightarrow w(x, \eta)$ est continue au point $x = 0$.

Lemme. Dans les hypothèses 1° et 2°, l'équation (2) possède une solution unique ψ définie dans un voisinage de zéro ⁽¹⁾, continue pour $x = 0$ et telle que $\psi(0) = \eta$.

Ce lemme est une simple application pour notre but d'un théorème dans [5] (voir aussi [4], th. 3.2).

2. Maintenant nous allons envisager l'équation

$$(3) \quad \varphi(f(x)) = h(x)g(\varphi(x)).$$

Comme dans le cas où $\alpha = 0$ nous pouvons appliquer la théorie des solutions continues de (1) (voir [4], chapitre III), nous allons faire la recherche des solutions φ de (3) dans la classe U^α , $\alpha \neq 0$. Remarquons d'abord que si $\varphi \in U^\alpha$ est une solution de (3) et $f \in U^p$ ($p > 1$), $g \in U^q$ ($q > 1$), $h \in U^r$ ($r \geq 0$), alors

$$\varphi \circ f \in U^{p\alpha}, h(g \circ \varphi) \in U^{r+\alpha},$$

et on a les cas suivants:

$$(C_1) \quad p = q, r = 0 \quad (\text{et } \alpha \text{ quelconque}),$$

$$(C_2) \quad p > q, r > 0 \quad (\text{et } \alpha = \frac{r}{p-q} > 0),$$

$$(C_3) \quad p < q, r > 0 \quad (\text{et } \alpha = \frac{r}{p-q} < 0).$$

Pour prouver l'unicité des solutions de l'équation (3) dans la classe U^α , $\alpha > 0$, nous acceptons les hypothèses suivantes:

(i) la fonction f définie dans $I = \langle 0, a \rangle$ est là continue et $f(x) \neq x$ pour tout $x \neq 0$; en outre $f \in U^p$, $p > 1$;

(ii) la fonction g est continue dans $(0, a)$ et $g \in U^q$, $q > 1$;

(iii) la fonction $x \rightarrow x^{-q}g(x)$ satisfait dans $(0, a)$ à une condition de Lipschitz;

(iv) la fonction h est continue dans $(0, a)$ et $h \in U^r$, $r \geq 0$ ⁽²⁾.

Théorème 1. Dans les hypothèses (i)-(iv) au cas de (C_1) , pour chaque $\alpha > 0$ il existe exactement une fonction $\varphi \in U^\alpha$ vérifiant l'équation (3) dans un voisinage de zéro. La fonction φ est continue au point $x = 0$ et satisfait à la condition

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{-\alpha} \varphi(x) = \eta$$

où $\eta = \eta(\alpha)$ signifie un nombre positif tel que

$$(5) \quad \eta^{\alpha-1} \doteq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)^\alpha x^{\alpha(1-\alpha)}}{g(x)h(x)}.$$

Démonstration. Une fonction φ est dans un voisinage de zéro une solution de (3) appartenant à la classe U^α ($\alpha > 0$) et satisfaisant à (4) si et seulement si la fonction ϕ telle que

$$\phi(x) = x^{-\alpha} \varphi(x) \quad \text{pour } x \neq 0, \quad \phi(0) = \eta,$$

⁽¹⁾ Dans la suite de la note on appelle voisinage de zéro un intervalle de la forme $\langle 0, \delta \rangle$, $\delta > 0$.

⁽²⁾ Dans l'hypothèse (iv) nous admettons $r = 0$ pour que nos considérations puissent comprendre également le cas de l'équation (3) où $h(x) \equiv 1$ (celui que nous avons examiné dans [1] et [2]).