ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
CCCCXLI PRACE MATEMATYCZNE, ZESZYT 18 1977

Lech Anczyk

Solutions spéciales des quelques équations fonctionnelles

1. Dans la présente note nous considérons quelques cas de l'équation fonctionnelle

$$\varphi(f(x)) = g(x, \varphi(x)) \tag{1}$$

où la fonction φ est inconnue, la variable x est réelle, toutes les fonctions dans (1) sont réelles et définies dans un intervalle $I = \langle 0, a), a>0$.

Définition. Soit α un nombre réel. Nous désignons par U^α la classe de fonctions φ qui sont définies et positives dans un intervalle de la forme $(0, \delta)$ et pour lesquelles la limite $\lim\limits_{x\to 0} x^{-\alpha}\varphi(x)$ existe et est un nombre positif (cf. [3]).

Dans [1], [2] on a considéré les solutions dans la classe U^α d'une généralisation de l'équation de Böttcher

$$\varphi(f(x)) = (\varphi(x))^p, p>1.$$

Le but du travail présent est de prouver des théorèmes sur l'unicité des solutions dans la classe U^α pour des équations plus générales que celle traitée dans [1], [2], à savoir les équations du type (1) où la fonction g est de la forme

$$g(x, y) = h(x)g(y)$$

où

$$g(x, y) = y^{l(x)}k(x, y).$$

Dans nos considérations nous nous servirons d'un lemme concernant les solutions ψ de l'équation

$$\psi(x) = w\big(x, \psi(f(x))\big). \tag{2}$$

Afin de formuler le lemme nous admettons les hypothèses suivantes:

1° la fonction f définie dans l'intervalle $\langle 0, a)$ est là continue et $0<f(x)<x$ pour tout $x \in (0, a)$;

2° la fonction w est définie dans un voisinage du point $(0, \eta)$ tel que $w(0, \eta) = \eta$ et elle y satisfait à l'inégalité

$$|w(x, y_1)-w(x, y_2)| \leqslant \vartheta|y_1-y_2|, 0<\vartheta<1\ ;$$

en outre, la fonction $x \to w(x, \eta)$ est continue au point $x = 0$.

Lemme. Dans les hypothèses 1° et 2°, l'équation (2) possède une solution unique ψ définie dans un voisinage de zéro ([1]), continue pour $x = 0$ et telle que $\psi(0) = \eta$.

Ce lemme est une simple application pour notre but d'un théorème dans [5] (voir aussi [4], th. 3.2).

2. Maintenant nous allons envisager l'équation

$$\varphi(f(x)) = h(x)g(\varphi(x)) . \tag{3}$$

Comme dans le cas où $\alpha = 0$ nous pouvons appliquer la théorie des solutions continues de (1) (voir [4], chapitre III), nous allons faire la recherche des solutions φ de (3) dans la classe U^α, $\alpha \neq 0$. Remarquons d'abord que si $\varphi \in U^\alpha$ est une solution de (3) et $f \in U^p$ $(p>1)$, $g \in U^q(q>1)$, $h \in U^r(r \geqslant 0)$, alors

$$\varphi \circ f \in U^{p\alpha}, h(g \circ \varphi) \in U^{r+q\alpha} ,$$

et on a les cas suivants:

$$p = q , r = 0 \quad (\text{et } \alpha \text{ quelconque}) , \tag{C$_1$}$$

$$p > q , r >0 \quad \left(\text{et } \alpha = \frac{r}{p-q} >0\right), \tag{C$_2$}$$

$$p < q , r >0 \quad \left(\text{et } \alpha = \frac{r}{p-q} <0\right). \tag{C$_3$}$$

Pour prouver l'unicité des solutions de l'équation (3) dans la classe U^α, $\alpha>0$, nous acceptons les hypothèses suivantes:

(i) la fonction f définie dans $I = \langle 0, a)$ est là continue et $f(x) \neq x$ pour tout $x \neq 0$; en outre $f \in U^p, p>1$;

(ii) la fonction g est continue dans $(0, a)$ et $g \in U^q, q>1$;

(iii) la fonction $x \to x^{-q} g(x)$ satisfait dans $(0, a)$ à une condition de Lipschitz;

(iv) la fonction h est continue dans $(0, a)$ et $h \in U^r, r \geqslant 0$ ([2]).

Théorème 1. Dans les hypothèses (i)-(iv) au cas de (C_1), pour chaque $\alpha>0$ il existe exactement une fonction $\varphi \in U^\alpha$ vérifiant l'équation (3) dans un voisinage de zéro. La fonction φ est continue au point $x = 0$ et satisfait à la condition

$$\lim_{x\to 0} x^{-\alpha}\varphi(x) = \eta \tag{4}$$

où $\eta = \eta(\alpha)$ signifie un nombre positif tel que

$$\eta^{q-1} \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)^\alpha x^{q(1-\alpha)}}{g(x)h(x)} . \tag{5}$$

Démonstration. Une fonction φ est dans un voisinage de zéro une solution de (3) appartenant à la classe $U^\alpha(\alpha>0)$ et satisfaisant à (4) si et seulement si la fonction ϕ telle que

$$\phi(x) = x^{-\alpha}\varphi(x) \quad \text{pour} \quad x \neq 0, \quad \phi(0) = \eta ,$$

([1]) Dans la suite de la note on appelle voisinage de zéro un intervalle de la forme $\langle 0, \delta)$, $\delta > 0$.

([2]) Dans l'hypothèse (iv) nous admettons $r = 0$ pour que nos considérations puissent comprendre également le cas de l'équation (3) où $h(x) \equiv 1$ (celui que nous avons examiné dans [1] et [2]).

est là une solution, continue en zéro, de l'équation

(6) $$\phi(f(x)) = \gamma(x, \phi(x))$$

où la fonction γ est définie par la formule

(7) $$\begin{cases} \gamma(x, y) \overset{\mathrm{df}}{=} f(x)^{-\alpha} h(x) g(x^\alpha y), & 0<x<a, \quad 0<y<x^{-\alpha}a, \\ \gamma(0, y) \overset{\mathrm{df}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \gamma(x, y) & \text{pour} \quad y>0. \end{cases}$$

Donc, l'existence (dans un voisinage de zéro) d'une solution $\varphi \in U^\alpha$ de l'équation (3) assujettie à (4) équivaut à celle d'une solution ϕ de (6) satisfaisant à la condition

(8) $$\lim_{x\to 0} \phi(x) = \eta,$$

ou bref, l'équation (3) équivaut à l'équation (6) (au sens précisé).

Maintenant nous allons prouver que la limite (5) existe et $\eta>0$ donné par (5) vérifie l'équation

(9) $$\eta = \gamma(0, \eta).$$

En effet, vu l'hypothèse que $f \in U^p$, $g \in U^q$, $h \in U^r$ et (C_1), il en résulte que $p = q$, $r = 0$ et on a

(10) $$f(x) = x^q F(x), \quad g(x) = x^q G(x), \quad h(x) = x^r H(x) = H(x)$$

où F, G, H sont des fonctions continues dans $\langle 0, a)$ et leurs valeurs en zéro sont positives. On voit facilement d'après (10) que l'on a

(11) $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)^\alpha x^{q(1-\alpha)}}{g(x)h(x)} = \frac{F(0)^\alpha}{G(0)H(0)},$$

et comme selon (7) nous pouvons écrire (pour $0<x<a$, $0<y<x^{-\alpha}a$)

(12) $$\gamma(x, y) = F(x)^{-\alpha} H(x) y^q G(x^\alpha y)$$

et

(13) $$\gamma(0, y) = \lim_{x\to 0} \gamma(x, y) = y^q F(0)^{-\alpha} H(0) G(0),$$

alors en posant $y = \eta$ défini par (5) on obtient (9) grâce à (11) et (13).

Par hypothèse, la fonction G: $x \to x^{-q} g(x)$ satisfait dans $(0, a)$ à une condition de Lipschitz ce qui entraîne, comme nous le verrons, l'inversibilité locale de la fonction γ_x: $y \to \gamma(x, y)$, x étant fixé arbitrairement, dans un voisinage du point η. Or, nous ferons voir qu'il existe un tel voisinage du point $(0, \eta)$ où est remplie l'inégalité

(14) $$|\gamma(x, y_1) - \gamma(x, y_2)| \geqslant \theta |y_1 - y_2|, \quad \theta > 1.$$

En s'appuyant sur (11) on peut écrire pour y_1, y_2 quelconques tels que $x^{-\alpha}a > y_1 > y_2 > 0$, x étant fixé:

$$\begin{aligned} \gamma(x, y_1) - \gamma(x, y_2) &= F(x)^{-\alpha} H(x) [y_1^q G(x^\alpha y_1) - y_2^q G(x^\alpha y_2)] \\ &= F(x)^{-\alpha} H(x) \{(y_1^q - y_2^q) G(x^\alpha y_1) + y_2^q [G(x^\alpha y_1) - G(x^\alpha y_2)]\} \\ &\geqslant F(x)^{-\alpha} H(x) \{(y_1^q - y_2^q) G(x^\alpha y_1) - y_2^q |G(x^\alpha y_1) - G(x^\alpha y_2)|\} \\ &\geqslant (y_1 - y_2) [q \tilde{y}^{q-1} G(x^\alpha y_1) F(x)^{-\alpha} H(x) - L y_2^q x^\alpha F(x)^{-\alpha} H(x)], \end{aligned}$$

$\tilde{y}$ étant un point de l'intervalle (y_2, y_1).

L'inégalité (14) sera prouvée si nous montrons que le premier membre de l'expression dans les crochets tend vers q, pendant que l'autre vers 0, quand $x \to 0$, $y_i \to \eta$ $(i = 1, 2)$.

Il en est ainsi en effet, car si $x \to 0$, alors en tenant compte de (13) on a

$$G(x^\alpha y_1)F(x)^{-\alpha}H(x) \to \eta^{1-q},$$

et comme $y_2 \leqslant \tilde{y} \leqslant y_1$, donc si $(x, y_i) \to (0, \eta)$,

$$\partial \tilde{y}^{q-1} G(x^\alpha y_1)F(x)^{-\alpha}H(x) \to q \quad \text{et} \quad L y_2^q x^\alpha F(x)^{-\alpha}H(x) \to 0 .$$

Il s'ensuit de (14) qu'il existe un voisinage S du point $(0, \eta)$, soit $S = \langle 0, \delta) \times (\eta-\varepsilon, \eta+\varepsilon)$, $\eta-\varepsilon>0$, δ suffisamment petit, dans lequel la fonction γ_x est univoque pour chaque x fixé. Donc il existe dans S une fonction inverse (par rapport à y) à γ_x qu'on va désigner par w. Aussi il existe des $\varepsilon_1, \varepsilon_2>0$ tels que l'équation (6) équivaut dans S à l'équation de la forme

$$\phi(x) = w\big(x, \phi(f(x))\big), \tag{15}$$

et la fonction w en raison de (14) vérifie dans l'ensemble $\langle 0, \delta) \times (\eta-\varepsilon_1, \eta+\varepsilon_2)$ l'inégalité

$$|w(x, z_1)-w(x, z_2)| \geqslant \frac{1}{\theta}|z_1-z_2|, \quad \frac{1}{\theta}<1 . \tag{16}$$

Finalement, remarquons que les conditions $f \in U^p$ et $f(x) \neq x$ entrainent les inégalités $0<f(x)<x$ dans $(0, a)$.

Ces inégalités et (16) ainsi que (9) permettent d'appliquer dans l'intervalle $\langle 0, \delta)$ notre lemme. On en conclut qu'il existe dans $\langle 0, \delta)$ exactement une solution de l'équation (15) satisfaisant à (8).

Vu l'équivalence des équations (3) et (6), le théorème se trouve ainsi démontré.

Par contre, pour prouver l'unicité des solutions de (3) dans la classe U^α, $\alpha<0$, nous acceptons sur g les hypothèses suivantes:

(ii') la fonction $\bar{g}$: $x \to g\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue dans $(0, a)$ et $\bar{g} \in U^{-q}$, $q>1$;

(iii') la fonction $x \to x^q g\left(\frac{1}{x}\right)$ satisfait dans $(0, a)$ à une condition de Lipschitz.

Théorème 2. Dans les hypothèses (i), (ii'), (iii'), (iv) au cas de (C_1), pour chaque $\alpha<0$ il existe exactement une fonction $\varphi \in U^\alpha$ satisfaisant à l'équation (3) dans un voisinage de zéro ainsi qu'à la condition

$$\lim_{x \to 0} x^{-\alpha}\varphi(x) = \eta \tag{17}$$

où $\eta = \eta(\alpha)$ signifie un nombre positif tel que

$$\eta^{q-1} \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f(x)^\alpha}{g\left(\frac{1}{x}\right)h(x)x^{q(1+\alpha)}} . \tag{18}$$

La démonstration du théorème 2 ne diffère pas essentiellement de celle du théorème 1, alors nous n'allons présenter que certains détails de calcul qui sont ici différents.

Or, la fonction γ s'exprime ici vu (10) par la formule

$$
\left\{\begin{array}{l} \gamma(x, y) \overset{\mathrm{df}}{=} F(x)^{-\alpha}H(x)y^q G\left(\dfrac{1}{x^\alpha y}\right), \quad 0<x<a, \quad y>\dfrac{x^{-\alpha}}{a}, \\ \gamma(0, y) \overset{\mathrm{df}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\gamma(x, y) \quad \text{pour} \quad y>0 . \end{array}\right. \tag{19}
$$

Ainsi que dans (11) il est aisé de voir que l'on a

$$
\lim_{x\to 0} \frac{f(x)^\alpha}{g\left(\dfrac{1}{x}\right) h(x)x^{q(1+\alpha)}} = \frac{F(0)^{-\alpha}}{G(0)H(0)}, \tag{20}
$$

ce qui veut dire que la limite (18) existe.

D'après (19), étant donne que $\alpha<0$, on obtient pour $y>0$ l'égalité

$$
\gamma(0, y) = y^q F(0)^{-\alpha}H(0)G(0),
$$

et en posant $y = \eta$ défini par (18) on voit bien grâce à (20) que l'on a (9), ce qu'il fallait démontrer.

Afin de prouver que pour la fonction γ définie par (19) on a (14), introduisons pour simplifier l'écriture la notation $\beta = -\alpha>0$. En profitant de (19) nous pouvons écrire pour y_1, y_2 quelconques tels que $y_1>y_2>\dfrac{x^\beta}{a}$, x étant fixé:

$$
\begin{aligned}
\gamma(x, y_1)-\gamma(x, y_2) &= F(x)^\beta H(x)\left\{(y_1^q-y_2^q)\, G\left(\frac{x^\beta}{y_1}\right) + y_2^q\left[G\left(\frac{x^\beta}{y_1}\right)-G\left(\frac{x^\beta}{y_2}\right)\right]\right\} \\
&\geqslant (y_1-y_2)\left[q\tilde{y}^{q-1}G\left(\frac{x^\beta}{y_1}\right)F(x)^\beta H(x)-Ly_2^q x^\beta \bar{y}^{-2}F(x)^\beta H(x)\right],
\end{aligned}
$$

$\tilde{y}$, $\bar{y}$ étant des points de l'intervalle (y_2, y_1).

Notons que si $x\to 0$, on a en raison de (20)

$$
G\left(\frac{x^\beta}{y_1}\right)F(x)^\beta H(x)\to\eta^{1-q},
$$

et comme $\tilde{y}, \bar{y}\in(y_2, y_1)$, donc si $(x, y_i)\to(0, \eta)$,

$$
q\tilde{y}^{q-1}G\left(\frac{x^\beta}{y_1}\right)F(x)^\beta H(x)\to q
$$

et

$$
Ly_2^q x^\beta\bar{y}^{-2}F(x)^\beta H(x)\to 0 .
$$

Ainsi, l'inégalité (14) pour γ définie par (19) se trouve démontrée. La suite de la démonstration parcourt d'une façon analogue à celle du théorème 1.

Les démonstrations des deux théorèmes suivants ne diffèrent pas en principe de celles des théorèmes 1 ou 2, et nous les omettons.

Théorème 3. Dans les hypothèses (i)-(iv) au cas de (C_2), l'équation (3) possède dans un voisinage de zéro une solution unique $\varphi \in U^\alpha$ où $\alpha = \dfrac{r}{p-q} > 0$. La fonction φ est continue au point $x = 0$ et satisfait à la condition (4) où η est donné par (5).

Théorème 4. Dans les hypothèses (i), (ii'), (iii'), (iv) au cas de (C_3), l'équation (3) possède dans un voisinage de zéro une solution unique $\varphi \in U^\alpha$ où $\alpha = \dfrac{r}{p-q} < 0$. La fonction φ satisfait à la condition (17) où η est donné par (18).

3. Dans la suite de la note nous avons à envisager l'équation

$$\varphi(f(x)) = (\varphi(x))^{l(x)} k(x, \varphi(x)). \tag{21}$$

Nous supposons sur k et l:

(v) la fonction k est définie et continue dans un ensemble $\Omega \subset R^2$ contenant le point $(0, 0)$, $k(0, 0) > 0$, et dans un voisinage V du point $(0, 0)$ est remplie une condition de Lipschitz

$$|k(x, y_1) - k(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|, \quad (x, y_i) \in V \cap \Omega;$$

(vi) la fonction l étant continue dans un voisinage de zéro satisfait à la condition

$$l(x) - p = o\left(\frac{1}{\ln x}\right), \quad x \to 0. \tag{22}$$

Nous allons énoncer un correspondant au théorème 1 pour l'équation (21).

Théorème 5. Dans les hypothèses (i) et (v)-(vi), pour chaque $\alpha > 0$ il existe exactement une fonction $\varphi \in U^\alpha$ vérifiant l'équation (21) dans un voisinage de zéro. La fonction φ est continue au point $x = 0$ et satisfait à la condition

$$\lim_{x \to 0} x^{-\alpha} \varphi(x) = \eta \tag{23}$$

où η est donné par la formule

$$\eta^{p-1} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)^\alpha}{x^{\alpha l(x)} k(x, x)}. \tag{24}$$

La démonstration de ce théorème s'obtient d'une manière analogue à celle du théorème 1, avec une telle différence de calcul qu'afin d'obtenir l'inégalité (14) nous utilisons ici au lieu de (iii) la condition de Lipschitz pour k dans (v) ainsi que (vi) pour l. Aussi nous nous bornerons seulement à montrer l'existence de la limite (24) et à constater que η donné par (24) vérifie l'équation $\eta = \gamma(0, \eta)$ où γ est une fonction définie pareillement que dans (7) (cf. th. 1).

Or, γ s'exprime ici par la formule (pour $x \neq 0$)

$$\gamma(x, y) = x^{\alpha(l(x)-p)} F(x)^{-\alpha} y^{l(x)} k(x, x^{\alpha} y) . \tag{25}$$

Notons qu'en vertu de (22) dans (vi) on a

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha(l(x)-p)} = \lim_{x\to 0} \exp[\alpha(l(x)-p)\ln x] = \exp\{\lim_{x\to 0} \alpha(l(x)-p)\ln x\} = 1 .$$

Il s'ensuit de (25) vu $\alpha>0$ et (22) que l'on a

$$\eta = \gamma(0, \eta) \Leftrightarrow \eta = \eta^{p} F(0)^{-\alpha} k(0, 0) .$$

Le membre de droite dans cette relation est équivalent ($\eta>0$) à l'égalité

$$\eta^{p-1} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)^{\alpha}}{x^{\alpha l(x)} k(x, x)} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)^{\alpha}}{k(x, x) x^{\alpha(l(x)-p)}} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)^{\alpha}}{k(x, x)} = \frac{F(0)^{\alpha}}{k(0, 0)},$$

donc la limite (24) existe effectivement et l'égalité $\eta = \gamma(0, \eta)$ est remplie pour η défini par (24).

Nous finissons nos considérations par énoncer un théorème (dont la démonstration nous omettons) pour $\alpha<0$ correspondant au théorème 2. Dans ce but au lieu de (v) nous supposons que

(vii) la fonction $\bar{k}$: $(x, y) \to k\left(x, \frac{1}{y}\right)$ satisfait à l'hypothèse (v) concernant k.

Théorème 6. Dans les hypothèses (i) et (vi)–(vii), pour chaque $\alpha<0$ il existe exactement une fonction $\varphi \in U^{\alpha}$ satisfaisant à l'équation (21) dans un voisinage de zéro ainsi qu'à la condition (23) où η est donné par (24) avec $\bar{k}$ au lieu de k.

TRAVAUX CITÉS

[1] L. Anczyk, *On the functional equation $\varphi(f(x)) = g(\varphi(x))$*, Mathematica (Cluj), 14 (37), 1972, pp. 5—8.

[2] —, *O pewnym równaniu funkcyjnym*, Zesz. Nauk. AGH nr 325, Matematyka Fizyka Chemia z. 9. 1973, pp. 17—22.

[3] M. Kuczma, *Sur l'équation fonctionnelle de Böttcher*, Mathematica (Cluj), 8 (31), 1966, pp. 279—285.

[4] —, *Functional equations in a single variable*, Monografie Matematyczne 46, Warszawa 1968, PWN.

[5] J. Matkowski, *On some properties of solutions of a functional equation*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach nr 2, Prace Matematyczne I, 1969, pp. 79—82.