

Sur une méthode des différences finies pour l'équation différentielle non linéaire elliptique aux dérivées mixtes et la condition aux limites du type de Neumann

par M. MALEC

1. On considère ici une méthode des différences finies, appelée dans la suite schéma des différences finies, pour l'équation partielle

$$(1.1) \quad f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in (0, \sigma)^n$$

où $\frac{\partial u}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\}$ ($i, j = 1, \dots, n$) avec la condition aux limites du type de Neumann sous la forme

$$(1.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \varphi_i(x) \text{ pour } x_i = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \psi_i(x) \text{ pour } x_i = \sigma \\ (i = 1, \dots, n) \end{cases}$$

Le schéma des différences finies mentionné s'obtient en remplaçant dans (1.1) les dérivées par rapport à x_i par les quotients centraux des différences finies et les autres dérivées du second ordre par les quotients ayant la forme

$$(1.3) \quad \frac{1}{2h^2} (u^{i(M)} + u^{j(M)} + u^{-i(M)} + u^{-j(M)} - 2u^M - u^{i(-j(M))} - u^{-i(j(M))})$$

où

$$(1.4) \quad \frac{1}{2h^2} (-u^{i(M)} - u^{j(M)} - u^{-i(M)} - u^{-j(M)} + 2u^M + u^{i(j(M))} + u^{-i(-j(M))}) \quad (i \neq j)$$

On prouve que de tels schémas sont convergents et on propose une estimation de l'erreur de la méthode des différences finies (théorème 1).

2. Dans le travail entier nous poserons que les hypothèses suivantes sont satisfaites

1) la fonction scalaire $f(x, u, q, w)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$, $w = (w_{11}, \dots, w_{1n}, \dots, w_{n1}, \dots, w_{nn})$ est de la classe C^1 dans l'ensemble

$$(2.1) \quad D = [0, \sigma]^n \times R^{1+n+n^2}$$

et satisfait dans cet ensemble aux conditions

$$(2.2) \quad \frac{\partial f}{\partial u} \leq L < 0, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial q_i} \right| \leq \Gamma, \quad 0 < g \leq \frac{\partial f}{\partial w_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{\partial f}{\partial w_{ij}} \right|, \quad \frac{\partial f}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial w_{ji}}$$

$$(i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n)$$

où L , Γ et g sont des nombres,

2) pour les indices établis i, j ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$) la fonction $\frac{\partial f}{\partial w_{ij}}$ est toujours non négative ou toujours non positive,

3) la fonction $u(x)$ est de la classe C^2 dans l'ensemble

$$(2.3) \quad E = [0, \sigma]^n$$

et satisfait à l'équation différentielle partielle (1.1) de même qu'aux conditions aux limites (1.2) où les fonctions φ_i et ψ_i sont de la classe C^2 sur les hyperplans $x_i = 0$ et $x_i = \sigma$ respectivement,

4) le pas h est tel que

$$(2.4) \quad \frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2} \geq 0$$

Remarque. La fonction $u(x)$, $x \in E \subset R^n$ est dite de classe C^r dans l'ensemble fermé E s'il existe une telle fonction $\tilde{u}(x)$ de classe C^r dans R^n que $\tilde{u}(x) = u(x)$ sur E .

3. Supposons que N est un nombre naturel et m_1, \dots, m_n sont des nombres entiers et soit

$$(3.1) \quad \begin{cases} M = (m_1, \dots, m_n) \\ z_1 = \{M: 0 \leq m_i \leq N+1, i = 1, \dots, n\} \\ z_2 = \{M: -1 \leq m_i \leq N, i = 1, \dots, n\} \end{cases}$$

Introduisons les notations suivantes

$$(3.2) \quad \begin{cases} -i(M) = (m_1, \dots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \dots, m_n) \quad (M \in Z_1) \\ i(M) = (m_1, \dots, m_{i-1}, m_i + 1, m_{i+1}, \dots, m_n) \quad (M \in Z_2) \\ (i = 1, \dots, n) \end{cases}$$

et soit

$$(3.3) \quad Z = \{M: \text{ils existent } i \text{ et } j \ (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n) \text{ tels que}$$

$$i(j(M)) \text{ ou } i(-j(M)) \text{ ou } -i(j(M)) \text{ ou } -i(-j(M)) \text{ appartenant à } Z_1 \cap Z_2\}$$

On suppose qu'à chaque multi-indice $M \in Z$ correspond un nombre réel v^M et on admet que

$$(3.4) \quad \begin{cases} v^{Mi} = \frac{1}{2h} (v^{i(M)} - v^{-i(M)}) \\ v^{+Mij} = \frac{1}{2h^2} (-v^{i(M)} - v^{j(M)} - v^{-i(M)} - v^{-j(M)} + 2v^M + v^{i(j(M))} + v^{-i(-j(M))}) \\ v^{-Mij} = \frac{1}{2h^2} (v^{i(M)} + v^{j(M)} + v^{-i(M)} + v^{-j(M)} - 2v^M - v^{i(-j(M))} - v^{-i(j(M))}) \\ (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, M \in Z_1 \cap Z_2) \end{cases}$$

Considérons maintenant dans l'espace euclidien à n -dimensions E^n un ensemble de points nodaux ayant les coordonnées

$$(3.5) \quad x_i^{m_i} = m_i h \quad (i = 1, \dots, n)$$

où $M = (m_1, \dots, m_n) \in Z$, $0 < h = \frac{\sigma}{N}$ et désignons le point nodal $(x_1^{m_1}, \dots, x_n^{m_n})$ par x^M .

Dans la suite nous supposons que les nombres v^M satisfont aux conditions

$$(3.6) \quad \begin{cases} v^{Mi} = \varphi_i(x^M) \text{ pour } m_i = 0 \\ v^{Mi} = \psi_i(x^M) \text{ pour } m_i = N \\ v^{i(j(M))} = v^{-i(-j(M))} + 2h[\varphi_i(x^M) + \psi_j(x^M)] \text{ pour } m_i = m_j = N \ (i \neq j) \\ v^{-i(j(M))} = v^{i(-j(M))} - 2h[\varphi_i(x^M) - \psi_j(x^M)] \text{ pour } m_i = 0 \text{ et } m_j = N \ (i \neq j) \\ v^{-i(-j(M))} = v^{i(j(M))} - 2h[\varphi_i(x^M) + \psi_j(x^M)] \text{ pour } m_i = m_j = 0 \ (i \neq j) \\ v^{i(-j(M))} = v^{-i(j(M))} + 2h[\psi_i(x^M) - \varphi_j(x^M)] \text{ pour } m_i = N \text{ et } m_j = 0 \ (i \neq j) \\ (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, M \in Z_1 \cap Z_2) \end{cases}$$

et à l'équation aux différences finies

$$(3.7) \quad f(x^M, v^M, v^{MI}, v^{MIJ}) = 0 \quad (M \in Z_1 \cap Z_2)$$

où les fonctions φ_i, ψ_i, f sont les mêmes que celles figurant dans (1.2)

