ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
CCCCLXXV PRACE MATEMATYCZNE, ZESZYT 19 1977

Sur les automates commutatifs

par E. Barcz, M. Kania et Z. Moszner

On donne dans la note la structure générale de l'automate abstrait plein dont le dictionnaire d'entrée forme un groupe.

Nous comprenons sous l'automate de cette sorte le système $A = (G, P, \Gamma, \delta, \lambda)$ où:

1) G-nommé le dictionnaire d'entrée de l'automate, forme un groupe avec l'unité x_0 *),

2) P-nommé le dictionnaire de sortie, est un semigroupe avec l'unité droite y_0 et avec la propriété de réduction à gauche:

$$\bigwedge_{y_1, y_2, y_3 \in P} (y_1 y_2 = y_1 y_3 \Rightarrow y_2 = y_3),$$

3) Γ est un ensemble arbitraire, nommé l'ensemble des états de l'automate,

4) δ — la fonction de passage et λ — la fonction de sortie, ce sont des fonctions:

$$\delta \colon \Gamma \times G \to \Gamma, \qquad \lambda \colon \Gamma \times G \to P$$

telles que

$$\delta(a, x_1 x_2) = \delta(\delta(a, x_1), x_2) \tag{1}$$

et

$$\lambda(a, x_1 x_2) = \lambda(a, x_1) \lambda(\delta(a, x_1), x_2) \tag{2}$$

sur $\Gamma \times G$ et

$$\bigwedge_{a \in \Gamma} (\delta(a, x_0) = a). \tag{3}$$

On dit que l'automate A est commutatif si

$$\delta(a, x_1 x_2) = \delta(a, x_2 x_1), \tag{4}$$

$$\lambda(a, x_1 x_2) = \lambda(a, x_2 x_1) \tag{5}$$

pour chaque a de Γ et chaque x_1, x_2 de G.

---

*) Nous utiliserons dans G et P la notation multiplicative.

C'est une définition analogue à celle qu'a donnée J. Gancarzewicz dans [1] pour les objets algébriques commutatifs.

L'automate A est évidemment commutatif si G et P sont commutatifs, mais l'inverse n'est pas vrai. Il suffit de poser $\delta(a, x) = a$ et $\lambda(a, x) = y_0$ pour chaque (a, x) de $\Gamma \times G$ et pour G pas commutatif.

Nous donnerons dans la suite la structure des fonctions δ et λ dans l'automate A (voir [2]).

I. La fonction δ qui remplit (1) est de la forme:

$$\delta(a, x) = \delta_k^{-1}[\delta_k(f(a))x] \text{ pour } f(a) \in \Gamma_k ,$$

où

(I.1) $f\colon \Gamma \to \Gamma$ est une fonction telle que $f(f(a)) = f(a)$ pour chaque a de Γ;

(I.2) $$f(\Gamma) = \bigcup_{k \in K} \Gamma_k; \quad \bigwedge_{k \in K} (\Gamma_k \neq \emptyset); \quad \bigwedge_{k_1, k_2 \in K} (k_1 \neq k_2 \Rightarrow \Gamma_{k_1} \cap \Gamma_{k_2} = \emptyset);$$

(c'est-à-dire $f(\Gamma)$ est décomposé aux ensembles $\Gamma_k (k \in K)$ non-vides et disjoints),
(I.3) pour chaque k de K il existe un sous-groupe G_k du groupe G tel que la puissance de l'ensemble Γ_k est égale à la puissance de l'ensemble G/G_k des classes d'équivalence à droit du groupe G par rapport au sous-groupe G,

(I.4) δ_k est une bijection de Γ_k sur G/G_k.

II. Chaque fonction λ qui remplit (2), où δ satisfait à l'équation (1), peut être construite comme suit **).

(II.1) Pour chaque k de K soit $\bar{\lambda}_k$ un homomorphisme de G à P.

(II.2) Soit $\tilde{s}_k(C)\colon G/G_k \to G$ une fonction pour laquelle $\tilde{s}_k(C) \in C$ et $\tilde{s}_k(G_k) = x_0$; posons $s_k(\bar{x}) \overset{\mathrm{df}}{=} \tilde{s}_k(C)$ pour $\bar{x} \in C \in G/G_k$.

(II.3) Désignons par $f_k\colon s_k(G) \to P$ une fonction pour laquelle $f_k(x_0) = y_0$ et pour laquelle il existe un sous-groupe P_k du semigroupe P tel que $f(s_k(G)) \subset P_k$.

(II.4) Soit a_k un élément de Γ_k pour lequel $\delta_k(a_k) = G_k$ et pour chaque a de Γ_k par $\bar{x}(a)$ désignons un élément de G pour lequel $\delta(a_k, \bar{x}(a)) = a$.

(II.5) Soit h une fonction de $\Gamma \setminus \bigcup_{k \in K} \Gamma_k$ à P et posons

(II.6) $\lambda_k(x) = \bar{\lambda}_k(x(s_k(x))^{-1}] f_k(s_k(x))$.

(II.7) Enfin nous avons:

$$\lambda(a, x) = \begin{cases} [\lambda_k(\bar{x}(a))]^{-1} \lambda_k(\bar{x}(a)x) & \text{si } a \in \Gamma_k , \\ h(a)\lambda(\delta(a, x_0), x) & \text{si } a \in \Gamma \setminus \bigcup_{k \in K} \Gamma_k . \end{cases}$$

**) La construction ci-dessous est une simplification du résultat dans [2], donnée par B. Pilecka dans sa thèse [4].

Si nous avons (3) dans ce cas $f(a) \equiv a$, de la $\Gamma = \bigcup_{k \in K} \Gamma_k$ et

$$\lambda(a, x) = [\lambda_k(\bar{x}(a))]^{-1}\lambda_k(\bar{x}(a)x) \text{ pour } a \in \Gamma_k .$$

THÉORÈME 1. *La fonction δ, remplissant* (1), *satisfait à la condition* (4) *si et seulement si le groupe quotient G/J est abélien, où*

$$J = \{x \in G: \bigwedge_{a \in \Gamma} \delta(a, x) = \delta(a, x_0)\} . \tag{6}$$

Démonstration. G/J est abélien si et seulement si $K(G) \subset J$, où $K(G)$ est le commutant du groupe G, c'est-à-dire le sous-groupe du groupe G engendré par l'ensemble des commutateurs des éléments de G:

$$K(G) \stackrel{\text{df}}{=} \{aba^{-1}b^{-1}: a, b \in G\} .$$

G/J est donc abélien si et seulement si $aba^{-1}b^{-1} \in J$ pour chaque a et b de G. Cela est équivalent à la condition:

$$\delta(a, aba^{-1}b^{-1}) = \delta(a, x_0) ,$$

c'est-à-dire à la condition:

$$\delta(\delta(a, aba^{-1}b^{-1}), ba) = \delta(\delta(a, x_0), ba) .$$

La dernière relation est, d'après (1), équivalente à la condition (4), c.q.f.d.

Remarquons (voir [3]) que

$$J = \bigcap_{x \in G} \bigcap_{k \in K} (x^{-1}G_k x)$$

et, puisque le commutant $K(G)$ du groupe G est le diviseur normal de ce groupe, on peut remplacer dans le théorème 1 la condition: G/J est le groupe abélien par la relation:

$$K(G) \subset \bigcap_{k \in K} G_k . \tag{7}$$

La relation $J = \{x_0\}$ est caractéristique pour les automates réduits par rapport au dictionnaire d'entrée, c'est-à-dire pour les automates qui ont la propriété suivante: (voir [2] p. 58—59):

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in G} \{[\bigwedge_{a \in \Gamma} \delta(a, x_1) = \delta(a, x_2)] \Rightarrow (x_1 = x_2)\} .$$

Pour les automates réduits la relation (4) est évidemment équivalente à la commutativité du groupe G, d'accord avec le théorème 1 puisque dans le cas $J = \{x_0\}$ le groupe G/J est isomorphe avec le groupe G.

THÉORÈME 2. *La fonction λ remplissant* (2), *où δ remplit* (1) *et* (4), *satisfait à la condition* (5) *si et seulement si $G/\bigcap_{k \in K} \bar{\lambda}_k^{-1}(\{y_0\})$ est le groupe quotient abélien de G, où $\bar{\lambda}_k$ sont définis par* (II.1).

Démonstration: Si δ est une solution commutative de (1) dans ce cas:

$$s_k(\bar{x}(\alpha)x_2x_1) = s_k(\bar{x}(\alpha)x_1x_2)\,, \tag{8}$$

où s_k est défini par (II.2) et $\bar{x}(\alpha)$ est défini par (II.4).

En effet nous avons d'après (7):

$$\bar{x}(\alpha)x_2x_1[\bar{x}(\alpha)x_1x_2]^{-1} = \bar{x}(\alpha)[x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}]\bar{x}(\alpha)^{-1} \in G_k\,,$$

puisque $K(G)$ est le diviseur normal du groupe G, d'où la relation (8) a lieu.

D'après (II.7) la relation (5) a lieu pour chaque α de Γ si et seulement si elle a lieu pour α de $\Gamma\setminus\bigcup_{k\in K}\Gamma_k$, donc la relation (5) est équivalente à la suivante:

$$[\lambda_k(\bar{x}(\alpha))]^{-1}\lambda_k(\bar{x}(\alpha)x_1x_2) = [\lambda_k(\bar{x}(\alpha))]^{-1}\lambda_k(\bar{x}(\alpha)x_2x_1)$$

pour α de $\Gamma\setminus\bigcup_{k\in K}\Gamma_k$. Cette dernière relation est équivalente d'après (II.6) à la suivante:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_k[\bar{x}(\alpha)x_1x_2(s_k(\bar{x}(\alpha)x_1x_2))^{-1}]\,f_k(s_k(\bar{x}(\alpha)x_1x_2))\\ = \bar{\lambda}_k[\bar{x}(\alpha)x_2x_1(s_k(\bar{x}(\alpha)x_2x_1))^{-1}\,f_k(s_k(\bar{x}(\alpha)x_2x_1))\,.\end{aligned}$$

D'après (8) ceci est équivalent à la relation

$$\bar{\lambda}_k(\bar{x}(\alpha)x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}\bar{x}(\alpha)] = y_0\,, \tag{9}$$

c'est-à-dire à la relation:

$$\bar{x}(\alpha)x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}\bar{x}(\alpha)^{-1} \in \bar{\lambda}_k^{-1}(\{y_0\})\,. \tag{10}$$

Puisque $\bar{\lambda}_k^{-1}(\{y_0\})$, comme le noyau de l'homomorphisme $\bar{\lambda}_k$, est le diviseur normal du groupe G_k, la relation (10) est équivalente à la suivante:

$$x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1} \in \bar{\lambda}_k^{-1}(\{y_0\})\,,$$

c'est-à-dire à la relation:

$$K(G) \subset \bar{\lambda}_k^{-1}(\{y_0\})$$

pour chaque k de K, c.q.f.d.

Remarquons enfin que, d'après (II.1), $\bar{\lambda}_k(\{y_0\}) \subset G_k$ pour chaque k de K, donc les deux relations (4) et (5) ont lieu si et seulement si:

$$K(G) \subset \bigcap_{k\in K}\bar{\lambda}_k^{-1}(\{y_0\})\,.$$

Travaux cités

[1] J. Gancarzewicz, *On comutative algebraic object over a grupoid*, Zeszyty Nauk. UJ, Prace Mat., 12, 1968, 19—25.
[2] Z. Moszner, *Structure de l'automate plein, réduit et inversible*, Aequationes Math. 9, 1, 1973, 46—59.
[3] Z. Moszner, J. Tabor, *L'équation de translation sur la structure avec zéro*, Ann. Pol. Math. XXXI, 1976, 255—264.
[4] B. Pilecka, *O przedłużalności rozwiązań równań funkcyjnych w teorii automatów abstrakcyjnych*, manuscrit de la thèse de doctorat.