

## L'équation de translation sur le produit simple des groupes avec zéro

par Z. MOSZNER, M. WAŚKO

La note appartient au cycle des travaux (voir [2], [3], [5]) consacrés à la réduction de la solution de l'équation de translation sur le produit simple de deux structures algébriques aux solutions de cette équation sur les membres de ce produit. Les deux théorèmes dans cette note sont des généralisations du théorème 2 dans la note [3].

Nous comprenons par équation de translation l'équation suivante:

$$G(G(\alpha, u), v) = G(\alpha, u \cdot v),$$

où  $G(\alpha, u): \Gamma \times S \rightarrow \Gamma$ ,  $\Gamma$  est un ensemble arbitraire et  $S$  forme une structure algébrique par rapport à l'opération „ $\cdot$ “.

La solution générale de cette équation au cas où  $S$  forme un groupe est de la forme ([4]):

$$(1) \quad G(\alpha, u) = g_k^{-1}[g_k(g(\alpha)) \cdot u]$$

pour  $g(\alpha) \in \Gamma_k$ , où

a)  $g: \Gamma \rightarrow \Gamma$  satisfait à la condition

$$(2) \quad g(g(\alpha)) = g(\alpha);$$

$$b) \quad g(\Gamma) = \bigcup_{k \in K} \Gamma_k, \text{ où}$$

$$\bigwedge_{k \in K} \Gamma_k \neq \emptyset, \quad \bigwedge_{k_1, k_2 \in K} (k_1 \neq k_2 \Rightarrow \Gamma_{k_1} \cap \Gamma_{k_2} = \emptyset)$$

et il existe pour chaque  $k$  de  $K$  un sous-groupe  $G_k$  du groupe  $S$  tel que

$$\overline{S/G_k} = \overline{\Gamma_k},$$

où  $S/G_k$  désigne les classes d'équivalences à droit du groupe  $S$  par rapport au sous-groupe  $G_k$ ;

c)  $g_k$  est une bijection de  $\Gamma_k$  à  $S/G_k$ .

Les ensembles  $\Gamma_k$ , qui sont égaux aux ensembles  $G(\alpha, S)$ , sont nommés les fibres transitives de la solution  $G(\alpha, u)$ .

On dit que la solution  $G(x, u)$  est commutative si

$$G(x, u \cdot v) = G(x, v \cdot u)$$

pour chaque  $x$  de  $\Gamma$  et  $u, v$  de  $S$ .

Il est évident que si la structure  $S$  est commutative, dans ce cas chaque solution  $G(x, u)$  de l'équation de translation est commutative. Mais il existe des solutions de l'équation de translation commutatives pour la structure  $S$  non commutative (voir [1]).

On démontre ce qui suit

**THÉORÈME 1.** Soit  $G^1$  et  $G^2$  les deux groupes avec la notation multiplicative. Ajoutons au groupe  $G^2$  l'élément zéro 0, c'est-à-dire considérons  $G^2 \cup \{0\}$  ( $0 \notin G^2$ ) et posons  $0 \cdot u = u \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$  pour chaque  $u$  de  $G^2$ . Posons  $G = G^1 \times (G^2 \cup \{0\})$  comme le produit simple du groupe  $G^1$  par le groupe avec zéro  $G^2 \cup \{0\}$ . Supposons que  $\Gamma$  est un ensemble arbitraire,  $F: \Gamma \times G^1 \times (G^2 \cup \{0\}) \rightarrow \Gamma$  et  $F(x, 1, y)$  est une solution de l'équation de translation

$$(3) \quad F(F(x, 1, y), 1, u) = F(x, 1, y \cdot u)$$

de la forme (1) et commutative. Dans ce cas  $F(x, x, y)$  est une solution de l'équation de translation

$$(4) \quad F(F(x, x, y), u, z) = F(x, xu, yz)$$

remplissant la condition

$$(5) \quad \bigwedge_{x \in \Gamma} F(x, G^1 \times G^2) \subset F(x, \{1\} \times G^2)$$

si, et seulement si

$$(6) \quad F(x, x, y) = \begin{cases} F(x, 1, \bar{\varphi}_k(x)y) & \text{pour } y \neq 0 \text{ et } g(x) \in \Gamma_k, \\ f(x) & \text{pour } y = 0, \end{cases}$$

où

1)  $F(x, 1, y)$  est la solution de l'équation (3) pour laquelle l'ensemble  $E$  des fibres transitives, qui n'ont qu'un élément est non-vide,

2)  $\Gamma_k$  et  $g(x)$  ont le sens comme dans a) et b),

3)  $\varphi_k(x)$  pour chaque  $k$  de  $K$  est un homomorphisme du groupe  $G^1$  au groupe  $G^2/G_k^2$ ,  $\bar{\varphi}_k: G^1 \rightarrow G^2$  et

$$(7) \quad \bar{\varphi}_k(x) \in \varphi_k(x) \text{ pour } x \text{ de } G^1,$$

4)  $f: \Gamma \rightarrow E$ ,  $f(f(x)) = f(x)$  et

$$(8) \quad f(F(x, 1, y)) = f(x) \text{ pour chaque } x \text{ de } \Gamma \text{ et } y \text{ de } G^2.$$

La condition (5) désigne que les fibres transitives de la solution  $F(x, x, y)$  sont conclues aux fibres transitives de la solution  $F(x, 1, y)$  et la condition (8) désigne que la fonction  $f$  est stable sur chaque ensemble  $g^{-1}(\Gamma_k)$ .

Remarquons qu'on peut construire chaque fonction  $f$  remplissant les conditions dans 4) comme suit (voir [5] théorème 2 p. 258):

Nous prenons un ensemble  $E^* \subset E$ ,  $E^* \neq \emptyset$ .

Remarquons que pour chaque ensemble  $g^{-1}(\Gamma_k)$

$$\overline{g^{-1}(\Gamma_k) \cap E^*} \leq 1,$$

a) dans le cas où  $g^{-1}(\Gamma_k) \cap E^* = \{\alpha_0\}$  nous prenons

$$f(\alpha) = \alpha_0 \text{ pour } \alpha \text{ de } g^{-1}(\Gamma_k),$$

b) dans le cas où  $g^{-1}(\Gamma_k) \cap E^* = \emptyset$  nous posons

$$f(\alpha) = \alpha_1 \text{ pour chaque } \alpha \text{ de } g^{-1}(\Gamma_k),$$

où  $\alpha_1$  est un élément arbitrairement fixé de  $E^*$ .

Démonstration du théorème 1. Vérifions que la fonction (6) remplit l'équation (4).

Si  $y \cdot z \neq 0$  dans ce cas d'après (6), (3) et (1) nous avons

$$F(\alpha, x, y) = F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x)y) \in \Gamma_k$$

et de là d'après (2):

$$g(F(\alpha, x, y)) = F(\alpha, x, y) \in F_k.$$

Il en résulte d'après (6) que

$$F(F(\alpha, x, y), u, z) = F(F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x)y), 1, \bar{\varphi}_k(u)z).$$

Puisque  $F(\alpha, 1, y)$  est une solution commutative de l'équation (3) nous avons:

$$\begin{aligned} F(F(\alpha, x, y), u, z) &= F[F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x)y), 1, z\varphi_k(u)] = F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x)yz\varphi_k(u)) \\ &= F[F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x)), 1, yz\bar{\varphi}_k(u)] \\ &= F[F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x)), 1, \bar{\varphi}_k(u)yz] = F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x)\bar{\varphi}_k(u)yz). \end{aligned}$$

Remarquons que  $F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x)y)$  ne dépend pas du choix de la fonction  $\bar{\varphi}_k$  remplissant (7). En effet si  $w_1, w_2 \in \varphi_k(x)$  donc  $w_1y$  et  $w_2y$  appartiennent à la même classe d'équivalence à droit du groupe  $G^2$  par rapport au sous-groupe  $G_k^2$  et d'après (1) nous avons:  $F(\alpha, 1, w_1y) = F(\alpha, 1, w_2y)$ . Puisque d'après 3):

$$\bar{\varphi}_k(x) \cdot \bar{\varphi}_k(u) \in \varphi_k(x) \cdot \varphi_k(u) = \varphi_k(xu)$$

et

$$\bar{\varphi}_k(xu) \in \varphi_k(xu)$$

donc d'après ce qui précède et d'après (6)

$$F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x)\bar{\varphi}_k(u)yz) = F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(xu)yz) = F(\alpha, xu, yz).$$

Il en résulte que notre fonction  $F$  remplit l'équation (4) si  $y \cdot z \neq 0$ .

Si  $y \neq 0, z = 0$  nous avons d'après (6) et (8)

$$F[F(\alpha, x, y), u, 0] = f[F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x)y)] = f(\alpha) = F(\alpha, xu, 0).$$

Si  $y = 0$  et  $z \neq 0$  donc d'après (6) et 4) nous avons pour  $g(f(\alpha)) \in \Gamma_k$ :

$$F[F(\alpha, x, 0), u, z] = F[f(\alpha), 1, \bar{\varphi}_k(u)z] = f(\alpha) = F(\alpha, xu, 0).$$

Si enfin  $y = z = 0$  nous avons d'après (6) et 4)

$$F[F(\alpha, x, 0), u, 0] = f(f(\alpha)) = f(\alpha) = F(\alpha, xu, 0).$$

La fonction  $F$  de la forme (6) remplit donc l'équation (4) dans tous les cas possibles. On voit aussi facilement que cette fonction remplit aussi la condition (5).

Supposons à présent que la fonction  $F(\alpha, x, y)$  remplisse l'équation (4) et la condition (5) et que  $F(\alpha, 1, y)$  soit une solution commutative de (3). Nous allons démontrer que  $F$  a la forme (6).

La fonction  $F(\alpha, x, 1)$  est une solution de l'équation de translation

$$F(F(\alpha, x, 1), u, 1) = F(\alpha, xu, 1)$$

et d'après (5) les fibres transitives de cette solution sont contenues dans les fibres transitives de la solution  $F(\alpha, 1, y)$  de l'équation (3). Il en résulte que si  $\alpha_0 \in \Gamma_k$  donc  $F(\alpha_0, x, 1) \in \Gamma_k$  pour chaque  $x$  de  $G^1$ . Puisque  $F(\alpha, 1, y)$  est une fonction transitive sur  $\Gamma_k$ , donc pour chaque  $x$  de  $G^1$  il existe  $\bar{\varphi}_k(x)$  de  $G^2$  tel que

$$(9) \quad F(\alpha_0, 1, \bar{\varphi}_k(x)) = F(\alpha_0, x, 1).$$

Si  $x$  est fixé, l'ensemble de tous les éléments  $\bar{\varphi}_k(x)$  remplissant (9) forme une classe d'équivalence à droit du groupe  $G^2$  par rapport au sous-groupe  $G_k^2$ . Désignons cette classe par  $\varphi_k(x)$ . La fonction  $\varphi_k(x): G^1 \rightarrow G^2/G_k^2$  est un homomorphisme. D'après [1] nous savons que  $G_k^2$  doit être le diviseur normal de  $G^2$  puisque  $F(\alpha, 1, y)$  est une solution commutative de l'équation (3). De plus pour  $x_1, x_2$  de  $G^1$  nous avons d'un côté:

$$\begin{aligned} F(\alpha_0, x_1 \cdot x_2, 1) &= F[F(\alpha_0, x_1, 1), x_2, 1] = F[F(\alpha_0, 1, \bar{\varphi}_k(x_1)), x_2, 1] \\ &= F(\alpha_0, x_2, \bar{\varphi}_k(x_1)) = F[F(\alpha_0, x_2, 1), 1, \bar{\varphi}_k(x_1)] \\ &= F[F(\alpha_0, 1, \bar{\varphi}_k(x_2)), 1, \bar{\varphi}_k(x_1)] = F(\alpha_0, 1, \bar{\varphi}_k(x_1) \cdot \bar{\varphi}_k(x_2)) \end{aligned}$$

et de l'autre

$$F(\alpha_0, x_1 \cdot x_2, 1) = F(\alpha_0, 1, \bar{\varphi}_k(x_1 \cdot x_2)).$$

Il en résulte que

$$\varphi_k(x_1 \cdot x_2) = \varphi_k(x_1) \cdot \varphi_k(x_2)$$

c. q. f. d.

Soit à présent  $\alpha$  de  $\Gamma$  tel que  $g(\alpha) \in \Gamma_k$ . Si  $F(\alpha, 1, y)$  est transitive sur  $\Gamma_k$ , donc il existe un élément  $z$  de  $G^2$  tel que

$$F(\alpha_0, 1, z) = g(\alpha).$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} F(\alpha, x, 1) &= F(g(\alpha), x, 1) = F[F(\alpha_0, 1, z), x, 1] = F(\alpha_0, x, z) \\ &= F[F(\alpha_0, x, 1), 1, z] = F[F(\alpha_0, 1, \bar{\varphi}_k(x)), 1, z] \\ &= F[F(\alpha_0, 1, z), 1, \bar{\varphi}_k(x)] = F(g(\alpha), 1, \bar{\varphi}_k(x)) = F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x)) \end{aligned}$$

Il en résulte pour  $y \neq 0$  et  $g(\alpha) \in \Gamma_k$  que:

$$F(\alpha, x, y) = F[F(\alpha, x, 1), 1, y] = F[F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x)), 1, y] = F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x)y),$$

la fonction  $F$  a donc dans ce cas la forme (6).

De là pour  $z \neq 0$  nous avons:

$$F(\alpha, x, 0) = F[F(\alpha, 1, 0), x, z] = F[F(\alpha, 1, 0), 1, \bar{\varphi}_k(x)z] = F(\alpha, 1, 0)$$

pour  $g(F(\alpha, 1, 0)) \in \Gamma_k$ .

Posons  $f(\alpha) \stackrel{\text{df}}{=} F(\alpha, 1, 0)$ , nous avons

$$F(\alpha, x, 0) = f(\alpha),$$

alors la deuxième partie de la formule (6).

En posant dans (4)  $x = u = 1, y = 0$  on a

$$F(F(\alpha, 1, 0), 1, z) = F(\alpha, 1, 0),$$

de là  $f$  a comme valeur les fibres de la fonction qui n'ont qu'un élément ( $f: \Gamma \rightarrow E$ ). En posant dans (4)  $x = u = 1$  et  $y = z = 0$  nous obtenons  $f(f(\alpha)) = f(\alpha)$ , en posant là  $x = u = 1$  et  $z = 0$  nous obtenons (8), donc la fonction  $f$  remplit toutes les conditions dans 4).

La démonstration du théorème 1 est donc terminée.

Il est vrai que le

**THÉORÈME 2.** Soit  $G = (G^1 \cup \{0\}) \times G^2$ , où  $G^1$  et  $G^2$  sont des groupes avec une notation multiplicative. Soit  $F(\alpha, x, y): \Gamma \times G \rightarrow \Gamma$  une fonction telle que  $F(\alpha, 1, y)$  est une solution commutative de l'équation (3). Dans ce cas  $F(\alpha, 1, y)$  a la forme (1). Sous ces suppositions  $F(\alpha, x, y)$  est une solution de l'équation (4) remplissant (5) si, et seulement si

$$(10) \quad F(\alpha, x, y) = \begin{cases} F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x)y) & \text{pour } x \neq 0 \text{ et } g(\alpha) \in \Gamma_k, \\ F(h(\alpha), 1, y) & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

où I)  $F(\alpha, x, 1)$  est une solution de (3) dont l'ensemble  $E^1$  des fibres transitives, qui n'ont qu'un élément n'est pas vide, II)  $\Gamma_k, g(\alpha)$  et  $\bar{\varphi}_k(x)$  ont le même sens que dans le théorème 1, III)  $h: \Gamma \rightarrow E^1$  est une fonction telle que

$$(11) \quad h(h(\alpha)) = h(\alpha) \text{ pour chaque } \alpha \text{ de } \Gamma,$$

$$(12) \quad h(F(\alpha, 1, y)) = F(h(\alpha), 1, y) \text{ pour chaque } \alpha \text{ de } \Gamma \text{ et chaque } y \text{ de } G^2,$$

$$(13) \quad d(F(\alpha, x, 1)) = h(\alpha) \text{ pour chaque } \alpha \text{ de } \Gamma \text{ et chaque } x \text{ de } G^1.$$

Remarque. Les conditions III), (11), (13) ont la même interprétation que les conditions 4) et (8). La condition (12) désigne que  $h$  est un endomorphisme pour l'objet  $F(\alpha, 1, y)$  \*. Le problème se pose de donner la construction générale de la fonction  $h$  remplissant les conditions dans III).

Démonstration du théorème 2. La vérification que la fonction  $F$  de la forme (10) satisfait à la condition (4) dans le cas où  $x \cdot u \neq 0$  est la même que dans la démonstration du théorème 1. Considérons donc le cas où  $x \cdot u = 0$ .

\*) On peut donner une méthode de la construction des endomorphismes de cette sorte pour certains objets d'après [6].

Soit  $x = 0, u \neq 0$ . D'après (10) et d'après la commutativité de la fonction  $F(\alpha, 1, y)$  nous avons pour  $g(F(h(\alpha), 1, y))$  de  $\Gamma_k$ :

$$\begin{aligned} F[F(\alpha, 0, y), u, z] &= F[F(h(\alpha), 1, y), u, z] = F[F(h(\alpha), 1, y), 1, \bar{\varphi}_k(u) \cdot z] \\ &= F[F(h(\alpha), 1, y), 1, z \bar{\varphi}_k(u)] = F[h(\alpha), 1, yz \bar{\varphi}_k(u)] \\ &= F[h(\alpha), 1, \bar{\varphi}_k(u)yz] = F[F(h(\alpha), 1, \bar{\varphi}_k(u)), 1, yz] \end{aligned}$$

Puisque  $g(F(h(\alpha), 1, y)) = F(h(\alpha), 1, y)$  nous avons  $F(h(\alpha), 1, y) \in \Gamma_k$ , donc aussi  $g(h(\alpha)) \in \Gamma_k$ .

Il en résulte d'après (10) et d'après III) que

$$F[F(h(\alpha), 1, \bar{\varphi}_k(u)), 1, yz] = F[F(h(\alpha), u, 1), 1yz] = F(h(\alpha), 1, yz) = F(\alpha, 0, yz),$$

et de là:

$$F[F(\alpha, 0, y), u, z] = F(\alpha, 0, yz).$$

Si  $x \neq 0, u = 0$  donc d'après (10) et III) nous obtenons pour  $g(x)$  de  $\Gamma_k$ :

$$\begin{aligned} F[F(\alpha, x, y), 0, z] &= F[h(F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x)y)), 1, z] = F[F(h(\alpha), 1, \bar{\varphi}_k(x)y), 1, z] \\ &= F[h(\alpha), 1, \bar{\varphi}_k(x)yz] = F[F(h(\alpha), 1, \bar{\varphi}_k(x)), 1, yz] = F[h(F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x))), 1, yz] \\ &= F[h(F(\alpha, x, 1)), 1, yz] = F(h(\alpha), 1, yz) = F(\alpha, 0, yz). \end{aligned}$$

Si enfin  $x = u = 0$ , alors d'après (10) et III) nous avons:

$$\begin{aligned} F[F(\alpha, 0, y), 0, z] &= F[F(h(\alpha), 1, y), 0, z] = F[h(F(h(\alpha), 1, y)), 1, z] \\ &= F[F(h(\alpha), 1, y), 1, z] = F[F(h(\alpha), 1, y), 1, z] \\ &= F[h(\alpha), 1, yz] = F(\alpha, 0, yz). \end{aligned}$$

La fonction  $F$  donnée par la formule (10) satisfait donc à l'équation (4). On voit facilement que cette fonction remplit aussi la condition (5).

Supposons à présent que la fonction  $F$  est une solution de l'équation (4) et satisfait à la condition (5). Dans le cas de  $x \neq 0$ , en raisonnant comme dans la démonstration du Théorème 1, nous voyons que  $F$  a la forme (10).

Si nous posons

$$h(\alpha) \stackrel{\text{df}}{=} F(\alpha, 0, 1),$$

donc cette fonction remplit la formule (10) et toutes les conditions dans III). En effet posant dans (4)  $x = 0, y = u = 1, z = y$  nous obtenons

$$F[F(\alpha, 0, 1), 1, y] = F(\alpha, 0, y),$$

alors la condition:

$$(14) \quad F(h(\alpha), 1, y) = F(\alpha, 0, y)$$

est remplie.

En posant dans (4)  $x = u = 0, y = z = 1$  nous obtenons (11). Posons dans (4)  $x = z = 1, u = 0$ . De là d'après (14) nous avons (12). Nous recevrons la condition (13) en posant dans (4)  $y = z = 1$  et  $u = 0$ .

Si  $x = 0, y = z = 1$  dans (4) nous avons

$$F(F(\alpha, 0, 1), u, 1) = F(\alpha, 0, 1)$$

et de là  $h$  a comme les valeurs les éléments de l'ensemble  $E^1$  des fibres transitives de  $F(\alpha, x, 1)$  qui n'ont qu'un élément ( $h: \Gamma \rightarrow E^1$ ). La démonstration du théorème 2 est donc finie.

Remarquons que si  $G = G^1 \times G^2$  dans ce cas chaque solution  $F(\alpha, x, y)$  de l'équation (4) remplissant (5) et pour laquelle  $F(\alpha, 1, y)$  est commutative, est donnée par la première partie de la formule (6) ou de la formule (10).

Il en résulte que si  $S = (G^1 \times G^2) \cup \{0\}$  alors d'après les résultats dans [5] on peut donner la solution générale de l'équation de translation sur  $\Gamma \times S$ , pour laquelle est remplie la condition (5) et pour laquelle  $F(\alpha, 1, y)$  est commutative.

Enfin nous allons démontrer le

**THÉORÈME 3.** Soit  $G = (G^1 \cup \{0\}) \times (G^2 \cup \{0\})$  où  $G^1$  et  $G^2$  sont des groupes. Soit  $F(\alpha, x, y): \Gamma \times G \rightarrow \Gamma$  une fonction telle que  $F(\alpha, 1, y)$  est une solution commutative de l'équation (3).

Sous ces suppositions  $F(\alpha, x, y)$  est une solution de l'équation (4) remplissant (5) si et seulement si

$$(15) \quad F(\alpha, x, y) = \begin{cases} F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x)y) & \text{pour } x \neq 0, y \neq 0 \text{ et } g(x) \in \Gamma_k, \\ f(\alpha) & \text{pour } x \neq 0, y = 0, \\ F(h(\alpha), 1, y) & \text{pour } x = 0, y \neq 0, \\ h(f(\alpha)) & \text{pour } x = 0, y = 0, \end{cases}$$

où  $\Gamma_k, g(\alpha), \bar{\varphi}_k(x), E$  ont le même sens que dans le théorème 1,  $F(\alpha, x, 1)$  est une solution de l'équation de translation sur  $\Gamma \times G^1$  pour laquelle l'ensemble  $E^1$  des fibres transitives, qui n'ont qu'un élément est non-vide,

(i)  $f: \Gamma \rightarrow E$  est une fonction remplissant les conditions 4) dans le théorème 1,  $h: \Gamma \rightarrow E^1$  est une fonction satisfaisant aux conditions III) dans le théorème 2, les fonctions  $f$  et  $h$  remplissent encore la condition suivante

$$(16) \quad \bigwedge_{\alpha \in \Gamma} h(f(\alpha)) = f(h(\alpha)).$$

Démonstration du théorème 3. Vérifions que la fonction donnée par la formule (15) satisfait à l'équation (4). Si  $x = 0, y = 0, u \neq 0, z \neq 0$  donc d'après (15), (i), 4) dans le théorème 1 et (8) nous obtenons pour  $g(h(f(\alpha))) \in \Gamma_k$ :

$$\begin{aligned} F(F(\alpha, 0, 0), u, z) &= F(h(f(\alpha)), 1, \bar{\varphi}_k(u)z) \\ &= h[F(f(\alpha), 1, \bar{\varphi}_k(u)z)] = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0). \end{aligned}$$

Si  $x = 0, y = 0, u = 0, z \neq 0$  nous avons d'après (15), (i), 4) dans le théorème 1, (11) et (8)

$$\begin{aligned} F(F(\alpha, 0, 0), 0, z) &= F[h(f(\alpha)), 0, z] = F[h(h(f(\alpha))), 1, z] \\ &= F[h(f(\alpha)), 1, z] = h[F(f(\alpha), 1, z)] = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0). \end{aligned}$$

Pour  $x = 0, y = 0, u \neq 0, z = 0$  nous obtenons d'après (15) (i), (16)

$$F[F(\alpha, 0, 0), u, 0] = f(h(f(\alpha))) = h(f(f(\alpha))) = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0).$$

Soit  $x = u = 0, y = z = 0$ . D'après (15), (i) et (16) nous avons

$$\begin{aligned} F(F(\alpha, 0, 0), 0, 0) &= F(h(f(\alpha)), 0, 0) = h(f(h(f(\alpha)))) \\ &= h(h(f(f(\alpha)))) = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0). \end{aligned}$$

Si  $x \neq 0, y \neq 0, u = 0, z = 0$  donc d'après (15), (i) et (8) nous avons pour  $g(\alpha) \in \Gamma_k$

$$F(F(\alpha, x, y), 0, 0) = h(f(F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x \cdot y)))) = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0).$$

Supposons que  $x = u = 0, y \neq 0, z = 0$ . D'après (15), (i), (8) et (16) nous obtenons

$$\begin{aligned} F(F(\alpha, 0, y), 0, 0) &= h(f(F[h(\alpha), 1, y])) = h(f(h(\alpha))) \\ &= h(h(f(\alpha))) = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0). \end{aligned}$$

Si  $x \neq 0, y = z = 0, u = 0$  donc d'après (15), (i), 4) dans le théorème 1 nous avons

$$F(F(\alpha, x, 0), 0, 0) = F(f(\alpha), 0, 0) = h(f(f(\alpha))) = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0).$$

Dans le cas où  $x = 0, z = 0, y \neq 0, u \neq 0$  nous obtenons d'après (15), (i), (8) et (16)

$$\begin{aligned} F(F(\alpha, 0, y), u, 0) &= f(F(\alpha, 0, y)) = f[F(h(\alpha), 1, y)] \\ &= f(h(\alpha)) = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0). \end{aligned}$$

Si enfin  $x \neq 0, y = 0, u = 0, z \neq 0$ , alors d'après (15), (i), 4) dans le théorème 1 nous avons

$$\begin{aligned} F(F(\alpha, x, 0), 0, z) &= F(f(\alpha), 0, z) = F[h(f(\alpha)), 1, z] \\ &= h(F[f(\alpha), 1, z]) = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0). \end{aligned}$$

Dans les cas qui restent la vérification est la même que dans les démonstrations des théorèmes 1 et 2.

On voit aussi que la fonction  $F$  de la forme (15) remplit la condition (5).

Supposons à présent que la fonction  $F$  est une solution de l'équation (4) et satisfait à la condition (5). Dans les cas  $x \cdot y \neq 0$  et  $x \neq 0, y = 0$  en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1, nous voyons que  $F$  a la forme (15). Dans le cas où  $x = 0, y \neq 0$  le raisonnement est la même que dans la démonstration du théorème 2. Les fonctions  $f(\alpha) \stackrel{\text{df}}{=} F(\alpha, 1, 0)$  et  $h(\alpha) \stackrel{\text{df}}{=} F(\alpha, 0, 1)$  remplissent aussi la condition (16) et  $F(\alpha, 0, 0) = h(f(\alpha))$ . c. q. f. d.

Si  $x = 0, y = 0, u = 0, z \neq 0$  nous avons d'après (15), (i), 4) dans le théorème 1, (11) et (8)

$$\begin{aligned} F(F(\alpha, 0, 0), 0, z) &= F[h(f(\alpha)), 0, z] = F[h(h(f(\alpha))), 1, z] \\ &= F[h(f(\alpha)), 1, z] = h[F(f(\alpha), 1, z)] = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0). \end{aligned}$$

Pour  $x = 0, y = 0, u \neq 0, z = 0$  nous obtenons d'après (15) (i), (16)

$$F[F(\alpha, 0, 0), u, 0] = f(h(f(\alpha))) = h(f(f(\alpha))) = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0).$$

Soit  $x = u = 0, y = z = 0$ . D'après (15), (i) et (16) nous avons

$$\begin{aligned} F(F(\alpha, 0, 0), 0, 0) &= F(h(f(\alpha)), 0, 0) = h(f(h(f(\alpha)))) \\ &= h(h(f(f(\alpha)))) = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0). \end{aligned}$$

Si  $x \neq 0, y \neq 0, u = 0, z = 0$  donc d'après (15), (i) et (8) nous avons pour  $g(\alpha) \in \Gamma_k$

$$F(F(\alpha, x, y), 0, 0) = h(f(F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x \cdot y)))) = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0).$$

Supposons que  $x = u = 0, y \neq 0, z = 0$ . D'après (15), (i), (8) et (16) nous obtenons

$$\begin{aligned} F(F(\alpha, 0, y), 0, 0) &= h(f(F[h(\alpha), 1, y])) = h(f(h(\alpha))) \\ &= h(h(f(\alpha))) = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0). \end{aligned}$$

Si  $x \neq 0, y = z = 0, u = 0$  donc d'après (15), (i), 4) dans le théorème 1 nous avons

$$F(F(\alpha, x, 0), 0, 0) = F(f(\alpha), 0, 0) = h(f(f(\alpha))) = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0).$$

Dans le cas où  $x = 0, z = 0, y \neq 0, u \neq 0$  nous obtenons d'après (15), (i), (8) et (16)

$$\begin{aligned} F(F(\alpha, 0, y), u, 0) &= f(F(\alpha, 0, y)) = f[F(h(\alpha), 1, y)] \\ &= f(h(\alpha)) = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0). \end{aligned}$$

Si enfin  $x \neq 0, y = 0, u = 0, z \neq 0$ , alors d'après (15), (i), 4) dans le théorème 1 nous avons

$$\begin{aligned} F(F(\alpha, x, 0), 0, z) &= F(f(\alpha), 0, z) = F[h(f(\alpha)), 1, z] \\ &= h(F[f(\alpha), 1, z]) = h(f(\alpha)) = F(\alpha, 0, 0). \end{aligned}$$

Dans les cas qui restent la vérification est la même que dans les démonstrations des théorèmes 1 et 2.

On voit aussi que la fonction  $F$  de la forme (15) remplit la condition (5).

Supposons à présent que la fonction  $F$  est une solution de l'équation (4) et satisfait à la condition (5). Dans les cas  $x \cdot y \neq 0$  et  $x \neq 0, y = 0$  en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1, nous voyons que  $F$  a la forme (15). Dans le cas où  $x = 0, y \neq 0$  le raisonnement est la même que dans la démonstration du théorème 2. Les fonctions  $f(\alpha) \stackrel{\text{df}}{=} F(\alpha, 1, 0)$  et  $h(\alpha) \stackrel{\text{df}}{=} F(\alpha, 0, 1)$  remplissent aussi la condition (16) et  $F(\alpha, 0, 0) = h(f(\alpha))$ . c. q. f. d.

## Travaux cités

- [1] E. Barcz, M. Kania, Z. Moszner, *Sur les automates commutatifs*, sous presse dans *Zeszyty Naukowe UJ*.
- [2] M. Kania, *Sur la commutativité de la solution de l'équation de translation*, sous presse dans *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP, Kraków*.
- [3] S. Midura, J. Tabor, *The translation equation on a direct product of groups*, sous presse dans *Annales Pol. Math.*
- [4] Z. Moszner, *Structure de l'automate plein, réduit et inversible*, *Aequationes Math.*, vol. 9, fasc. 1, 1973 p. 46—59.
- [5] Z. Moszner, J. Tabor, *L'équation de translation sur une structure avec zéro*, *Annales Pol. Math.* XXXI 1976, p. 255—264.
- [6] S. Topa, *On a generalization of homogeneous functions*, *Publ. Math.* 13 (1966), p. 289—300.