ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

DII PRACE MATEMATYCZNE, Z. 20 1979

L'équation de translation sur le produit simple des groupes avec zéro

par Z. MOSZNER, M. WAŚKO

La note appartient au cycle des travaux (voir [2], [3], [5]) consacrés à la réduction de la solution de l'équation de translation sur le produit simple de deux structures algébriques aux solutions de cette équation sur les membres de ce produit. Les deux théorèmes dans cette note sont des géneralisations du théorème 2 dans la note [3].

Nous comprenons par équation de translation l'équation suivante:

$$G(G(\alpha, u), v) = G(\alpha, u\cdot v),$$

où $G(\alpha, u)$: $\Gamma\times S\to\Gamma$, Γ est un ensemble arbitraire et S forme une structure algébrique par rapport à l'opération „$\cdot$".

La solution générale de cette équation au cas où S forme un groupe est de la forme ([4]):

$$G(\alpha, u) = g_k^{-1}[g_k(g(\alpha))\cdot u] \tag{1}$$

pour $g(\alpha)\in\Gamma_k$, où

a) g: $\Gamma\to\Gamma$ satisfait à la condition

$$g(g(\alpha)) = g(\alpha); \tag{2}$$

b)

$$g(\Gamma) = \bigcup_{k\in K}\Gamma_k, \text{ où}$$

$$\bigwedge_{k\in K}\Gamma_k\neq\emptyset_i \bigwedge_{k_1,k_2\in K}(k_1\neq k_2\Rightarrow\Gamma_{k_1}\cap\Gamma_{k_2}=\emptyset)$$

et il existe pour chaque k de K un sous-groupe G_k du groupe S tel que

$$\overline{\overline{S/G_k}} = \overline{\overline{\Gamma_k}},$$

où S/G_k désigne les classes d'équivalences à droit du groupe S par rapport au sous-groupe G_k;

c) g_k est une bijection de Γ_k à S/G_k.

Les ensembles Γ_k, qui sont égaux aux ensembles $G(\alpha, S)$, sont nommés les fibres transitives de la solution $G(\alpha, u)$.

On dit que la solution $G(\alpha, u)$ est commutative si

$$G(\alpha, u \cdot v) = G(\alpha, v \cdot u)$$

pour chaque α de Γ et u, v de S.

Il est évident que si la structure S est commutative, dans ce cas chaque solution $G(\alpha, u)$ de l'équation de translation est commutative. Mais il existe des solutions de l'équation de translation commutatives pour la structure S non commutative (voir [1]).

On démontre ce qui suit

THÉORÈME 1. *Soit G^1 et G^2 les deux groupes avec la notation multiplicative. Ajoutons au groupe G^2 l'élément zéro 0, c'est-à-dire considérons $G^2 \cup \{0\}$ $(0 \notin G^2)$ et posons $0 \cdot u = u \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$ pour chaque u de G^2. Posons $G = G^1 \times (G^2 \cup \{0\})$ comme le produit simple du groupe G^1 par le groupe avec zéro $G^2 \cup \{0\}$. Supposons que Γ est un ensemble arbitraire, $F\colon \Gamma \times G^1 \times (G^2 \cup \{0\}) \to \Gamma$ et $F(\alpha, 1, y)$ est une solution de l'équation de translation*

$$F(F(\alpha, 1, y), 1, u) = F(\alpha, 1, y \cdot u) \tag{3}$$

de la forme (1) *et commutative. Dans ce cas $F(\alpha, x, y)$ est une solution de l'équation de translation*

$$F(F(\alpha, x, y), u, z) = F(\alpha, xu, yz) \tag{4}$$

remplissant la condition

$$\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} F(\alpha, G^1 \times G^2) \subset F(\alpha, \{1\} \times G^2) \tag{5}$$

si, et seulement si

$$F(\alpha, x, y) = \begin{cases} F(\alpha, 1, \bar{\varphi}_k(x) y) & \text{pour} \quad y \neq 0 \ \text{et} \ g(\alpha) \in \Gamma_k, \\ f(a) & \text{pour} \quad y = 0, \end{cases} \tag{6}$$

où

1) *$F(\alpha, 1, y)$ est la solution de l'équation* (3) *pour laquelle l'ensemble E des fibres transitives, qui n'ont qu'un élément est non-vide,*

2) *Γ_k et $g(\alpha)$ ont le sens comme dans a) et b),*

3) *$\varphi_k(x)$ pour chaque k de K est un homomorphisme du groupe G^1 au groupe G^2/G^2_k, $\bar{\varphi}_k\colon G^1 \to G^2$ et*

$$\bar{\varphi}_k(x) \in \varphi_k(x) \quad \text{pour } x \text{ de } G^1, \tag{7}$$

4) *$f\colon \Gamma \to E$, $f(f(\alpha)) = f(\alpha)$ et*

$$f(F(\alpha, 1, y)) = f(\alpha) \quad \text{pour chaque } \alpha \text{ de } \Gamma \text{ et } y \text{ de } G^2. \tag{8}$$

La condition (5) désigne que les fibres transitives de la solution $F(\alpha, x, y)$ sont conclues aux fibres transitives de la solution $F(\alpha, 1, y)$ et la condition (8) désigne que la fonction f est stable sur chaque ensemble $g^{-1}(\Gamma_k)$.

Remarquons qu'on peut construire chaque fonction f remplissant les conditions dans 4) comme suit (voir [5] théorème 2 p. 258):
Nous prenons un ensemble $E^* \subset E$, $E^* \neq \emptyset$.