

## Zur Padéschen Approximation der konvergenten Funktionenfolgen

K. RECZEK

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Padéschen Approximation. Es gibt zwei verschiedene Definitionen dieser Approximation, die jedoch nicht einander äquivalent sind. Als erste sei die von G. A. Baker angegebene angeführt:

Definition (Baker, [1]). Sei  $f$  eine in der Umgebung des Nullpunktes definierte analytische Funktion. Dann ist die  $(n, m)$ -te Padésche Funktion  $f_{[n/m]}$  eine rationale Funktion von folgenden Eigenschaften:

1.  $f_{[n/m]} = \frac{P_n}{Q_m}$ , worin  $P_n$  und  $Q_m$  Polynome sind,  $\deg P_n \leq n$ ,  $\deg Q_m \leq m$ ,
2.  $Q_m(0) = 1$ ,
3.  $Q_m(z)f(z) - P_n(z) = Az^{m+n+1} + \dots$ .

Die Funktion  $f_{[n/m]}$  muss nicht existieren, wenn sie aber existiert, wird sie durch diese Bedingungen eindeutig definiert. Die Polynome  $P_n$  und  $Q_m$  sind nicht eindeutig bestimmt, man kann aber deren Eindeutigkeit erreichen, wenn man voraussetzt, dass sie keine gemeinsamen Divisoren haben.

Die andere Definition wurde u. a. von M. G. de Bruin und H. van Rossum angewandt. Sie unterscheidet sich von der ersteren dadurch, dass die Voraussetzung  $Q_m(0) = 1$  nicht vorliegt. Es ist leicht zu beweisen, dass die Funktion richtig definiert ist. Sie existiert immer und im Falle der Existenz der Padéschen Funktion im vorstehend genannten Sinne sind beide Definitionen einander äquivalent (siehe: M. G. de Bruin, H. van Rossum, [2]). In der vorliegenden Arbeit lassen wir diese Voraussetzung ausser Betracht.

Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist

SATZ. Sei  $(F_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Funktionenfolge. Für jedes  $n$  sei  $F_n$  eine in der Umgebung  $U$  des Nullpunktes definierte analytische Funktion. Konvergiere diese Funktionenfolge gegen eine analytische Funktion  $F$ , gleichmässig auf jeder kompakten Menge  $K \subset U$ . Dann gilt für jedes Paar  $(k, m)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F_n)_{[k/m]}(z) = F_{[k/m]}(z)$$

für diejenigen  $z$ , die keine Häufungspunkte der Menge aller Pole der Funktionen  $(F_n)_{[k/m]}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sind. Diese Konvergenz ist gleichmässig auf jeder kompakten Menge, die keine von diesen Häufungspunkten enthält.

Beweis. Wir werden folgendes einfaches Lemma benutzen:



Funktion  $\frac{\sum_{i=0}^k p_i z^i}{\sum_{j=0}^m q_j z^j}$  und zwar gleichmässig auf jeder kompakten Menge, die keine

Nullstellen des Polynoms  $\sum_{j=0}^m q_j z^j$  enthält.

Aus der Stetigkeit der Addition und der Multiplikation folgt es, dass die Grenzfolge  $(p_0, \dots, p_k, q_0, \dots, q_m)$  eine Lösung des Gleichungssystems ist:

$$\begin{aligned} a_0 q_0 &= p_0 \\ \dots\dots\dots \\ a_k q_0 + \dots + a_0 q_k &= p_k \\ a_{k+1} q_0 + \dots + a_{k+1-m} q_m &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{k+m} q_0 + \dots + a_k q_m &= 0. \end{aligned}$$

Ausserdem sehen wir, dass nicht alle  $p_i$  und  $q_j$  gleich Null sind. So folgt es aus den Gleichungen, dass wenigstens einer von den Koeffizienten  $q_j$  von Null verschieden ist.

Die Funktion  $\frac{\sum_{i=0}^k p_i z^i}{\sum_{j=0}^m q_j z^j}$  ist also richtig definiert und ist gleich der Funktion  $F_{[k/m]}$ .

Nach dem Satz von Hurwitz ist jede Nullstelle von  $\sum_{j=0}^m q_j z^j$  ein Häufungspunkt der Menge der Nullstellen von  $\sum_{j=0}^m q_{[k/m],j}^{(n_p)} z^j$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , und umgekehrt: jeder solcher Häufungspunkt ist eine Nullstelle des Polynoms  $\sum_{j=0}^m q_j z^j$ .

Sei  $z$  eine Zahl, die kein Häufungspunkt der Menge aller Pole der Funktionen  $(F_n)_{[k/m]}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ist. Nach dem Lemma konvergiert die Folge  $((F_n)_{[k/m]}(z))_{n=1}^\infty$  gegen den Grenzwert  $F_{[k/m]}(z)$ . Es ist leicht zu beweisen, dass diese Konvergenz auf jeder kompakten, von der Menge der Häufungspunkte der Pole von  $((F_n)_{[k/m]})_{n=1}^\infty$  abgesonderten Menge gleichmässig ist. Wir haben also den Satz bewiesen.

Aus diesem Satz können einige Folgerungen ausgeführt werden.

Bezeichnen wir mit  $C[k/m; F]$  die Determinante der Matrix:

$$\begin{bmatrix} a_{k-m+1} & a_{k-m+2} & \dots & a_k \\ a_{k-m+2} & a_{k-m+3} & \dots & a_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & a_{k+1} & \dots & a_{k+m-1} \end{bmatrix}$$

Es kann folgendes bewiesen werden: Ist  $C[k/m; F]$  nicht gleich Null, so ist die Padésche Funktion  $F_{[k/m]}$  eine rationale Funktion, deren Rechner und Nenner keine gemeinsamen

Divisoren haben und wenigstens einer von ihnen (Rechner bzw. Nenner) ein Polynom höchster Ordnung ( $k$  bzw.  $m$ ) ist. Ausserdem ist der Nenner im Nullpunkt nicht gleich Null. (Sieh: Baker, [1].)

**Folgerung 1.** Sei  $F$  eine in der Umgebung  $U$  des Nullpunktes definierte analytische Funktion. Sei  $(F_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge der analytischen Funktionen, die auf jeder kompakten Teilmenge der Umgebung  $U$  gleichmässig gegen die Funktion  $F$  konvergiert. Wenn  $C[k/m; F]$  nicht gleich Null ist, dann konvergiert die Funktionenfolge  $((F_n)_{[k/m]})_{n=1}^{\infty}$  gegen  $F_{[k/m]}$  gleichmässig auf jeder kompakten Menge, die keine Pole der Funktion  $F_{[k/m]}$  enthält.

**Beweis.** Da die Determinante einer Matrix eine stetige Funktion deren Koeffizienten ist, gilt folgendes:

$$C[k/m; F_n] \neq 0 \text{ für alle genügend grossen } n.$$

Man kann voraussetzen, dass für alle  $n$   $C[k/m; F_n]$  nicht gleich Null ist.

Nach dem vorstehenden Satz kann aus jeder Folge der Padéschen Funktionen  $((F_n)_{[k/m]})_{n=1}^{\infty}$  eine Teilfolge ausgewählt werden, die gegen eine rationale Funktion  $p(z)/q(z)$  konvergiert. Nach der Bedingung  $C[k/m; F] \neq 0$  muss einer der Polynome  $\sum_{i=0}^k p_{[k/m],i} z^i$ ,  $\sum_{j=0}^m q_{[k/m],j} z^j$  ein Polynom der möglichst höchsten Ordnung sein; es existiert also eine Zahl  $\alpha \in \mathbb{C}$ , die nicht gleich Null ist und die den Bedingungen:

$$p(z) = \alpha \sum_{i=0}^k p_{[k/m],i} z^i$$

$$q(z) = \alpha \sum_{j=0}^m q_{[k/m],j} z^j$$

entspricht.

Bei jeder Folge  $(n_k)$  und bei jeder Auswahl der Teilfolge ist der Koeffizient  $q_0$  der Grenzfunktion von Null verschieden. Daraus ergibt sich, dass eine positive Zahl existieren muss, durch welche die Menge  $\{|q_{[k/m],0}^{(n)}|, n \in \mathbb{N}\}$  nach unten beschränkt wird. Das erlaubt uns, für alle natürlichen Zahlen  $n$  die Gleichung

$$q_{[k/m],0}^{(n)} = 1$$

vorauszusetzen. Dies impliziert, dass auch jede Grenzfunktion  $p(z)/q(z)$  der Bedingung  $q(0) = 1$  entspricht. Daraus folgt unmittelbar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m q_{[k/m],j}^{(n)} z^j = q(z)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k p_{[k/m],i}^{(n)} z^i = p(z)$$

gleichmässig auf jeder kompakten Menge. Nach dem Satz von Hurwitz sind die Nullstellen des Nenners  $q(z)$  der Funktion  $F_{[k/m]}$  die einzigen Häufungspunkte der Menge der Nullstellen von Polynomen  $\sum_{j=0}^m q_{[k/m],j}^{(n)} z^j$ ,  $n = 1, 2, \dots$  Die Folgerung ist bewiesen. Definieren

wir die  $\bar{c}$ -Kapazität  $\bar{c}(E)$  einer abgeschlossenen Menge  $E$  als ihren transfiniten Diameter bezüglich der sphärischen Metrik auf  $\hat{C}$ .

**FOLGERUNG 2.** *Ist  $(F_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge der analytischen Funktionen, die in einer Umgebung des Nullpunktes gleichmässig gegen eine Funktion  $F$  konvergiert, so konvergiert die Folge  $((F_n)_{[k/m]})_{n=1}^\infty$  nach der  $\bar{c}$ -Kapazität gegen die Funktion  $F_{[k/m]}$ .*

**Beweis.** Sei  $\max\{|p_{[k/m],i}^{(n)}|, i \leq k, |q_{[k/m],i}^{(n)}|, j \leq m\}$  gleich 1. Aus jeder Folge  $(n_p)$  kann man eine solche Teilfolge  $(n_{p_q})$  auswählen, dass für  $i \leq k, j \leq m$  die Folge  $(p_{[k/m],i}^{(n_{p_q})})_{q=1}^\infty$  bzw.  $(q_{[k/m],j}^{(n_{p_q})})_{q=1}^\infty$  eine konvergente Folge ist. Dann hat die Menge aller Pole der Folge  $((F_{n_{p_q}})_{[k/m]})_{q=1}^\infty$  höchstens  $m$  Häufungspunkte. Für eine beliebige positive Zahl  $\delta$  existieren solche kompakten Umgebungen dieser Häufungspunkte und eine solche positive Zahl  $R$ , dass die  $\bar{c}$ -Kapazität der Vereinigung  $\mathcal{V}$  dieser Umgebungen und der Menge  $\{z \in \hat{C}: |z| \geq R\}$  nicht grösser als  $\delta$  ist.

Sei  $\varepsilon$  eine positive Zahl. Es folgt unmittelbar aus dem vorstehenden Satz, dass für alle genügend grossen  $q$  die Ungleichung  $\|(F_{n_{p_q}})_{[k/m]} - F_{[k/m]}(z)\|_{C \setminus \mathcal{V}} < \varepsilon$  gilt.

Nach dem vorstehenden Lemma gilt folgendes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{c}(\{z: |(F_n)_{[k/m]}(z) - F_{[k/m]}(z)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

was zu beweisen war.

#### Literatur

- [1] G. A. Baker Jr., *Essentials of Padé Approximants*, A. P., New York 1975.  
 [2] M. G. de Bruin, H. van Rossum, *Formal Padé Approximation*, Nieuw Archief voor Wiskunde (3) XXIII (1975), 115—130.