ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
DCXXIII PRACE MATEMATYCZNE, ZESZYT 23 1982

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП С МАЛЫМ НАЛЕГАНИЕМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СЛОВ

М. Паласиньски

Пусть группа Γ задана образующими a_1, a_2,... и множеством определяющих слов $\mathscr{D}$, т. е. $\Gamma = «a_1, a_2, \ldots, \mathscr{D}»$, группа Γ_1 задана теми же образующими и множеством определяющих слов $\mathscr{D}_1$, т. е. $\Gamma_1 = «a_1, a_2, \ldots, \mathscr{D}_1»$. Если Γ и Γ_1 то говорим, что Γ и Γ_1 два представления одной и той же группы. В общем случае множества определяющих слов $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}_1$, могут быть различны. Однако в некоторых случаях эти множества должны совпадать (см. [1]).

Будем употреблять следующие обозначения и понятия. Графическое равенство, свободное равенство и равенство в данной группе будем обозначать $\overline{\underline{\circ}}$, $\equiv$, $=$ соответственно. Через $\partial(X)$ будем обозначать длину слова X.

Множество $\mathscr{D}$ слов называется симметризованым если вместе с каждым словом V, $\mathscr{D}$ содержит все циклические перестановки слов V и V^{-1}.

Пусть $0<\varepsilon<1$, а X, Y некоторые несократимые слова. Будем говорить, что при сокращении слова XY слово Y (слово X) теряет меньше ε своей длины, если при некоторых X_1, Y_1, Y_2 имеет место $X \overline{\underline{\circ}} X_1, Y_1^{-1}$, $Y \overline{\underline{\circ}} Y_1 Y_2$, где слово $X_1 Y_2$ несократимо и $\partial(Y_1)<\varepsilon\partial(Y)$ (соответственно $\partial(Y_1)<\varepsilon\partial(X)$)..

Через L_ε, ε положительное действительное число, будем обозначать класс групп $\Gamma = «a_1, a_2, \ldots, \mathscr{D}»$ удовлетворяющих следующим условиям:

1. множество $\mathscr{D}$ определяющих слов симметризовано;
2. если U, V определяющие слова группы Γ такие, что $U \overline{\underline{\circ}} V^{-1}$ то при сокращении слова UV слово U теряет меньше ε своей длины.

Группы из классов L_ε это так называемые группы с ограниченной мерой налегания определяющих слов или просто группы с малым налеганием определяющих слов.

В настоящей работе доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $\Gamma = «a_1, a_2, \ldots, \mathscr{D}»$ и $\Gamma_1 = «a_1, a_2, \ldots, \mathscr{D}_1»$ два представления одной и той же группы, такие, что Γ, $\Gamma_1 \in L_{\frac{1}{6}}$. Тогда $\mathscr{D} = \mathscr{D}_1$.*

Этот результат есть усиление результата М. Д. Гриндлингера (см. [1]).

Так как в наших рассуждениях будем использовать метод разработан Р. Линдоном и П. Шуппом (см. [2], [3], [4]), то напомним ряд понятий из этих работ нужных для понимания текста.

Пусть M плоский граф на плоскости Π.

Гранью G графа M будем называть ограниченную компоненту пополнения $\pi - M$ графа M. Берегом графа M называем топологический берег неограниченной компоненты пополнения $\pi - M$. Берегом грани G называем ее топологический берег. Внешней вершиной называем вершину принадлежащую берегу графа M. Аналогично определяется внешнее ребро. Внешняя грань графа M, это такая грань, берег которой содержит внешнее ребро. Вершины, ребра и грани которые не являются внешними будем называть внутренними.

Степень $d(v)$ вершины v графа M это число ребер инцидентных вершине v, при чем ребро, которого начало и конец находятся в вершине v считается дважды. Степенью $d(G)$ грани G называем число ребер составляющих ее берег, при чем ребро E такое, что грань G лежит с обеих его сторон считается дважды.

Пусть $\Gamma = «a_1, a_2, \ldots, \mathcal{D}»$.

Диаграммой над группой Γ называем конечный плоский граф M вместе с функцией Φ, приписывающей каждому ориентированному ребру E графа M оценку $\Phi(E)$ нетривиальный элемент группы Γ и обратный элемент $\Phi(E)^{-1}$ этому же ребру взятому с противной ориентацией.

Пусть G_1, G_2 две грани диаграммы M имеющие общее ребро E. Пусть X оценка ребра E. Тогда существуют слова A, B такие, что берега граней G_1, G_2 имеют оценки XA, BX^{-1} соответственно. Диаграмма M называется редуцированной если $A \not\equiv B^{-1}$.

Э. Р. Ван Кампен ([5]) заметил, что для любой группы Γ верно следующее: Пусть $X = 1$ в Γ. Тогда существует связная диаграмма M над группой Γ такая, что оценкой любого ее ребра является слово группы Γ, оценками берегов граней являются определяющие слова группы Γ, а оценкой берега диаграммы M является слово X.

Построение такой диаграммы описал Р. Линдон в [2]. П. Шупп (см. [3]) доказал, что диаграмму M можно взять редуцированной. В виду этого результата предположим, что все рассматриваемые в дальнейшем диаграммы для слов равных единице в группе Γ редуцированные.

Куском называется такое слово X, что $\mathcal{D}$ содержит два разных элемента V, W такие, что $V \,\bar{\circ}\, XA$, $W \,\bar{\circ}\, XB$. Допустим, что E является внутренним ребром в диаграмме M, разделяющим грани G_1, G_2 и X является оценкой ребра E. Если в качестве начала отсчета взять начальную точку ребра E, то берега граней G_1, G_2 имеют оценки $V \,\bar{\circ}\, XA$, $W \,\bar{\circ}\, BX^{-1}$ которые являются элементами множества D. Так как диаграмма M редуцированная, то $AB \not\equiv 1$. Следовательно D содержит разные элементы XA и XB^{-1}. Отсюда следует, что оценка любого внутреннего ребра является куском.

Пусть M связный плоский граф. Граф M называется графом типа (p, q) где p, q целые положительные числа, если выполняется следующее условие:

для всех внутренних вершин v графа M $d(v) \geqslant p$ и для всех внутренних граней G графа M таких, что пересечение берега грани G с берегом графа M пусто $d(G) \geqslant q$.

Скажем, что пересечение берега грани G графа M с берегом графа M является непрерывной частью берега M тогда и только тогда, когда это пересечение является связной последовательностью замкнутых ребер $E_1, \ldots, E_t, t \geqslant 1$, таких, что ребра $E_1, \ldots, E_t$ выступают друг за другом при обходе берега графа M.

Следующая теорема доказана П. Шуппом (см. [4], теор. 1).

Теорема 2. *Пусть M плоский связный граф типа (p, q), где (p, q) одна из пар (3, 6), (4,4), (6,3). Допустим, что M не содержит вершин степени один и M имеет больше одной грани. Тогда*

$$\sum{}^{*}\left[\frac{q}{p}+2-i(G)\right] \geqslant q,$$

где $\sum^*$ означает, что суммирование берется по внешним граниям G для которых пересечение берега грани G с берегом графа M является непрерывной частью берега M, а $i(G)$ означает число внутренних ребер грани G.

П. Шупп доказал также (см. [4]), что если граф M удовлетворяет дополнительному условию:

(+) $d(G) \geqslant q$ для всех внутренних граней G графа M то берег любой грани G графа M является простой цепью.

Используя теорему 2 мы можем получить некоторую информацию о словах равных единице в группах из класса $L_{\frac{1}{6}}$. В следующем следствии слово «содержит» надо понимать «содержит без пересечений».

Следствие. *Пусть $\Gamma \in L_{\frac{1}{5}}$. Пусть непустое, несократимое, круговое слово X равно 1 в Γ. Тогда X является либо определяющим словом, написанным на окружности, либо X удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:*

a) *найдутся два определяющие слова группы Γ такие, что X содержит больше $\frac{4}{5}$ каждого из них;*

b) *найдутся три определяющие слова группы Γ такие, что X содержит больше $\frac{4}{5}$ одного, больше $\frac{3}{5}$ другого и больше $\frac{2}{5}$ третьего определяющего слова;*

c) *найдутся три определяющие слова группы Γ такие, что X содержит больше $\frac{3}{5}$ каждого из них;*

d) *найдутся четыре определяющие слова группы Γ такие, что X содержит больше $\frac{4}{5}$ одного и больше $\frac{2}{5}$ каждого из остальных трех определяющих слов;*

e) *найдутся четыре определяющие слова группы Γ такие, что X содержит больше $\frac{3}{5}$ каждого из двух и больше $\frac{2}{5}$ каждого из остальных двух определяющих слов;*

f) *найдется пять определяющих слов группы Γ таких, что X содержит больше $\frac{2}{5}$ одного и больше $\frac{2}{5}$ каждого из остальных четырех определяющих слов;*

g) *найдется шесть определяющих слов группы Γ таких, что X содержит больше $\frac{2}{5}$ каждого из них.*

Доказательство. Пусть непустое, циклически несократимое слово X равно 1 в Γ. Тогда соответствующая этому слову связная диаграмма M, как доказал Р. Линдон (см. [2], части 3 и 4), удовлетворяет предположениям теоремы 2 для $(p, q) =$ (3,6), а также условию (+). Если M содержит точно одну грань, то X является определеяющим словом написанным на окружности.

Пусть M содержит больше одной грани. Тогда, применяя теорему 2 получаем

$$\sum^{*}[4-i(G)]\geqslant 6$$

Допустим, что в M нет грани G такой, что $i(G)=0$. Так как $\sum^{*}[4-i(G)]\geqslant 6$, то по крайней мере две грани должны давать положительный вклад в сумму $\sum^{*}[4-i(G)]$.

Если их точно две, скажем, G_1, G_2, то $i(G_1)=i(G_2)=1$. Пусть X_i оценка берега грани G_i и $X_i \,\overline{\underline{\circ}}\, Z_i Y_i$, где Z_i оценка внешнего ребра грани G_i, Y_i оценка внутреннего ребра грани G_i, $i=1,2$. Так как оценка каждого внутреннего ребра является куском, то в силу определения класса $L_{\frac{1}{5}}$, $\partial(Y_i)<\frac{1}{5}\partial(X_i)$, $i=1,2$. Отсюда получаем $\partial(Z_i)>\frac{4}{5}\partial(X_i)$, $i=1,2$, т. е. выполняется условие a).

Допустим теперь, что условие a) не выполняется и существуют ровно три грани, которые дают положительный вклад в сумму $\sum^{*}[4-i(G)]$. Несложный подсчет показывает, что тогда выполняется условие b) или c).

Рассуждая аналогично, получим, что если не выполняются условия a), b) и c), то выполняется одно из условий d) — g).

Если для некоторой грани Γ, $i(G)=0$, то удаляем эту грань и применяем выше приведенные рассуждения к диаграмме $M-G$.

Следство доказано полностью.

Теперь можем перейти к доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Доказывать будем от противного. Допустим, что заключение теоремы неверно. Тогда $(\mathscr{D}-\mathscr{D}_1)\cup(\mathscr{D}_1-\mathscr{D})\neq\phi$. Пусть слово A' принадлежит точно одному из множеств $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}_1$ нпр. A' принадлежит $\mathscr{D}_1$ и слово A' является словом минимальной длины среди слов, не принадлежащих общей части множеств $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}_1$. Из того, что множества $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}_1$ симметризованы следует, что все циклические перестановки слова A' и их обратные не принадлежат множеству $\mathscr{D}\cap\mathscr{D}_1$. Так как A' является определяющим словом в группе Γ_1 *и* $\Gamma=\Gamma_1$, то $A'=1$ в группе Γ, и A' не является определяющим словом группы Γ.

Напишем A' на окружности. Из сказанного выше и из следствия следует, что имеет место хотя бы один из следующих ниже двух случаев I и II.

I. Найдутся два определяющие слова U, V группы Γ такие, что A' содержит без пересечения больше $\frac{4}{5}$ каждого из них, скажем, A' содержит без пересечения подслова U_1, V_1 такие, что $U \,\overline{\underline{\circ}}\, U_1U_2$, $V \,\overline{\underline{\circ}}\, V_1V_2$ и $\partial(U_1)>\frac{4}{5}\partial(U)$, $\partial(V_1)>\frac{4}{5}\partial(V)$.

I.1. $U\in\mathscr{D}\cap\mathscr{D}_1$ или $V\in\mathscr{D}\cap\mathscr{D}_1$. Допустим, что $U\in\mathscr{D}\cap\mathscr{D}_1$. Тогда, в частности, слово U принадлежит множеству $\mathscr{D}_0$, и для некоторой циклической перестановки A^{*} слова A', при сокращении слова $U^{-1}A^{*}$ слово U^{-1} теряет больше $\frac{4}{5}$ своей длины, что противоречит определению группы Γ_1. Этот случай не может иметь места.

I.2. $U\notin\mathscr{D}\cap\mathscr{D}_1$ и $V\notin\mathscr{D}\cap\mathscr{D}_1$. Так как длина A' минимальна среди длин слов, не принадлежащих $\mathscr{D}\cap\mathscr{D}_1$, то $\partial(A')\leqslant\partial(U)$ и $\partial(A')\leqslant\partial(V)$, откуда получаем $\partial(A')\geqslant \partial(U_1)+\partial(V_1)>\frac{4}{5}\partial(U)+\frac{4}{5}\partial(V)\geqslant\frac{8}{5}\partial(A')$. Мы получили противоречие. Этот случай не может иметь места.

II. Найдутся три определяющие слова U_1, U_2, U_3 группы Γ такие, что A' содержит без пересечений больше $\frac{2}{5}$ каждого из них, скажем, A' содержит подслова U_1', U_2', U_3' такие, что $U_i \overset{\circ}{=} U_i' U_i''$ и $\partial(U_i') > \frac{2}{5}\partial(U_i)$, где $i = 1, 2, 3$.

II.1. По крайней мере одно из слов $U_i (i = 1, 2, 3)$ принадлежит множеству $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1$.

Допустим, что $U_1 \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1$. Тогда для некоторой циклической перестановки A^* слова A' при сокращении слова $U_1^{-1}A^*$ слово U_1^{-1} теряет больше $\frac{2}{5}$ своей длины, что противоречит определению группы Γ_1.

Этот случай не может иметь места.

II.2. $U_i \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1$ для $i = 1, 2, 3$. Так как слово A' минимальной длины среди слов не принадлежащих множеству $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1$, то $\partial(A') \leqslant \partial(U_i)$ для $i = 1, 2, 3$, откуда получаем

$$\partial(A') \geqslant \partial(U_1') + \partial(U_2') + \partial(U_3') > \tfrac{2}{5}\partial(U_1) + \tfrac{2}{5}\partial(U_2) + \tfrac{2}{5}\partial(U_3) \geqslant \tfrac{6}{5}\partial(A')$$

Мы получили противоречие.

Этот случай не может иметь места.

Из выше сказанного следует, что $(\mathcal{D} - \mathcal{D}_1) \cup (\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}) = \phi$, т. е. $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$, что и требовалось доказать.

Скажем, что группа $\Gamma = «a_1, a_2, \ldots, \mathcal{D}»$ принадлежит классу T_n, n целое положительное число, если для любых n определяющих слов $V_1, \ldots, V_n$ группы Γ, по крайней мере в одном из слов V_1V_2, $V_2V_3, \ldots, V_{n-1}V_n$, V_nV_1 нет сокращений.

Используя такой же метод как примененный выше можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $\Gamma = «a_1, a_2, \ldots; \mathcal{D}»$ и $\Gamma_1 = «a_1, a_2, \ldots; \mathcal{D}_1»$ два представления одной и той же группы такие, что $\Gamma \in L_{\frac{1}{3}} \cap T_3$, $\Gamma_1 \in L_{\frac{1}{3}} \cap T_3$. Тогда $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. D. Greendlinger, *An analogue of a theorem of Magnus*, Archiv der Math. 12 (1961) 94–96.
[2] R. Lyndon, *On Dehn's algorithm*, Math. Ann. 166 (1966) 208–228.
[3] P. Schupp, *On Dehn's algorithm and the conjugacy problem*, Math. Ann. 178 (1968) 119–130.
[4] P. Schupp, *On Greendlinger's lemma*, Comm. Pure and Appl. Math. 23, 2 (1970) 233–240.
[5] E. R. von Kampen, *On some lemmas in the theory of groups*, Ann. J. Math. 55 (1933) 268–273.

INSTITUTE OF MATHEMATICS
JAGELLONIAN UNIVERSITY
KRAKÓW (POLAND)