ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
DCXXIII PRACE MATEMATYCZNE, ZESZYT 23 1982

Eine Bemerkung über die Konstruktion von Holomorphiehüllen

Peter PFLUG

In [2] hat der Autor folgendes Kriterium für das Berechnen von Holomorphiehüllen angegeben

SATZ. *Ist G ein Gebiet im $\boldsymbol{C}^n$ mit schlichter Holomorphiehülle $H(G)$, und ist jede auf G holomorphe Funktion f von polynomialem Wachstum bereits holomorph auf dem G umfassenden Holomorphiegebiet $G' \subset \boldsymbol{C}^n$, so gilt: $H(G) = G'$.*

Zur Erinnerung für den Leser: eine auf G holomorphe Funktion f heißt von polynomialem Wachstum, falls für eine geeignete positive Zahl N die Funktion

$$|f(z)| \cdot [\min(1, \operatorname{dist}(z, \partial G))(1+|z|^2)^{-1/2}]^N$$

auf G beschränkt ist; man schreibt: $f \in \mathcal{O}(\Delta_G)$. In konkreten Fragen war es immer lästig, *a priori* feststellen zu müssen, daß G eine schlichte Holomorphiehülle besitzt. Die vorliegende Note zeigt nun, daß obiges Resultat auch ohne diese Voraussetzung richtig bleibt.

Wir benötigen dazu folgendes Ergebnis [1] von Jarnicki

SATZ. *Ist (X, p) ein zusammenhängendes Riemann-Stein-Gebiet, so trennt $\mathcal{O}(\delta_X)$ die Punkte von X; dabei ist δ_X die naheliegende Verallgemeinerung von Δ_G.* (*)

Bemerkung. a) Diese Aussage ist in [1] als offenes Problem formuliert; es kann aber mit dem Beweis zu Satz 3 [1] sofort gelöst werden. b) Wenn man genau arbeitet, sieht man, daß bereits die polynomialen Funktionen der Ordnung $7n+1$ die Punkte trennen.

Nach dieser Vorbereitung folgt dann

SATZ. *Ist G ein Gebiet im $\boldsymbol{C}^n$, und ist jede auf G holomorphe Funktion f von polynomialen Wachstum bereits holomorph auf dem Holomorphiegebiet G' mit $G \subset G' \subset \boldsymbol{C}^n$, so ist G' gleich der Holomorphiehülle von G.*

Denn:
Wegen [2] ist (G', id) maximale holomorphe Erweiterung von $((G, id), \mathcal{O}(\Delta_G))$. Also folgt die Existenz folgenden kommutativen Diagrammes:

$$\begin{tikzcd}
 & (H(G), p) \arrow[dr, "p"] & \\
(G, id) \arrow[ur, "j"] \arrow[rr, hook] & & (G', id)
\end{tikzcd}$$

Mit (*) findet sich zu Punkten $a, b \in H(G)$, $a \neq b$ mit $p(a) = p(b)$ eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\delta_{H(G)})$ mit $f(a) \neq f(b)$. Weil dann $f \circ j \in \mathcal{O}(\Delta_G)$ gilt, sieht man aus der Voraussetzung: $f \circ j$ ist zu einer auf G' holomorphen Funktion F fortsetzbar, für die wegen $F \circ p = f \circ j$ auf $H(G)$ gilt: $f = F \circ p$; speziell bedeutes dies: $f(a) = F(p(a)) = F(p(b)) = f(b)$. Also ist $H(G)$ schlicht, woraus sofort $H(G) = G'$ mit [1] folgt. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Wie in obiger Bemerkung schon angedeutet wurde, genügt in diesem Satz die Information, daß die auf G polynomialen Funktionen der Ordnung $7n+1$ bereits auf G' holomorph sind.

Literatur

[1] M. Jarnicki, *Holomorphic functions with bounded growth on Riemann domains over* C^n, Zeszyty Naukowe UJ, Prace Matematyczne 20 (1979), 43–51.

[2] P. Pflug, *Über polynomiale Funktionen auf Holomorphiegebieten*, Math. Zeitschrift 139 (1974), 133–139.

GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL
WUPPERTAL (BRD)