ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
DCXXIII PRACE MATEMATYCZNE, ZESZYT 23 1982

Le prolongement de la solution de l'équation et de l'inégalité de translation avec l'agrandissement borné de la fibre

par Zenon MOSZNER

§ 1. Soit Γ un ensemble arbitraire et S une structure algébrique par rapport à l'opération "+": $S\times S \to S$ et soit F: $\Gamma\times S \to \Gamma$ une solution de l'équation de translation

(1) $$F(F(\alpha, x), y) = F(\alpha, x+y).$$

Soit de plus S_1 une sur-structure de S. Nous désignerons l'opération dans S_1 aussi par "+". Nous pouvons considérer le prolongement de F sur S_1 en quatre sens:

1) s'il existe un prolongement F_1: $\Gamma\times S_1 \to \Gamma$ de F, remplissant (1) sur $\Gamma\times S_1$ — dans ce cas nous parlons du problème du *prolongement sans l'agrandissement de la fibre* Γ,

2) s'il existe un sur-ensemble Γ_1 de $\Gamma(\Gamma\subset\Gamma_1)$ et un prolongement F_1: $\Gamma_1\times S_1 \to \Gamma_1$ de F remplissant (1) sur $\Gamma_1\times S_1$ — dans ce cas nous parlons du problème du *prolongement avec l'agrandissement arbitraire de la fibre* Γ à la fibre Γ_1,

3) soit donné un sur-ensemble Γ_2 de $\Gamma(\Gamma\subset\Gamma_2)$ — s'il existe un sur-ensemble Γ_1 de Γ, étant en même temps un sous-ensemble de $\Gamma_2(\Gamma\subset\Gamma_1\subset\Gamma_2)$, et un prolongement F_1: $\Gamma_1\times S_1 \to \Gamma_1$ de F remplissant (1) sur $\Gamma_1\times S_1$ — dans ce cas nous parlons du problème du *prolongement avec l'agrandissement borné* (par l'ensemble Γ_2) *de la fibre* Γ à la fibre Γ_1,

4) soit donné un sur-ensemble Γ_2 de l'ensemble Γ, s'il existe un prolongement F_2: $\Gamma_2\times S_1 \to \Gamma_2$, de F remplissant (1), dans ce cas nous parlons que F_2 est un *prolongement* de F *avec l'agrandissement donné* Γ_2 *de la fibre* Γ.

§ 2. Supposons à présent que $\mathcal{G}^+$ soit un sous-groupe des éléments non-négatifs d'un groupe $\mathcal{G}$ ordonné, archimédien et complet.

On démontre dans la note [5] que

(I) *la solution* F *de* (1) *sur* $\Gamma\times\mathcal{G}^+$ *est prolongeable sans agrandissement de la fibre* Γ *au groupe* $\mathcal{G}$ *tout entier si et seulement si*

(2) *la puissance de l'ensemble*

$$E_\alpha(\beta) := \{x\in\mathcal{G}^+ \colon F(\alpha, x) = \beta\},$$

où $\alpha\in\Gamma$, $\beta\in F(\alpha, \mathcal{G}^+)$, *ne dépend pas de* β *(cette puissance peut dépendre de* α*), et*

(3) *la relation* R *définie comme suit*

$$\alpha R\beta \Leftrightarrow \bigvee_{x\in\mathcal{G}^+} [F(\alpha, x) = \beta \text{ où } F(\beta, x) = \alpha]$$

est une équivalence sur $F(\Gamma, \mathscr{G}^+) =: \Gamma^*$ *et de plus*

(4) $$\bigwedge_{x \in \mathscr{G}^+} \bigwedge_{C} F(C, 0) \subset F(C, x),$$

où C *est une classe d'équivalence arbitraire de la relation* R *sur l'ensemble* E *de tous les éléments* α *de* $F(\Gamma, \mathscr{G}^+)$ *pour lesquels* $F(\alpha, \cdot)$ *est une injection et* 0 *est l'élément neutre du groupe* $\mathscr{G}$.

Faisons les deux remarques suivantes.

A. *On peut remplacer la condition* (4) *dans* (I) *par la condition plus simple suivante*

(5) $$\bigwedge_{x \in \mathscr{G}^+} F(\Gamma, 0) \subset F(\Gamma, x).$$

Pour démontrer que (5) $\Rightarrow$ (4) il suffit de remarquer que

(6) $$\bigwedge_{A \in \Gamma^*/R} \bigwedge_{x \in \mathscr{G}^+} F(A, x) \subset A.$$

En effet si $\alpha \in F(A, x)$, donc il existe β de A tel que $\alpha = F(\beta, x)$. De là $\alpha R \beta$ et puisque $\beta \in A$, alors $\alpha \in A$. L'ensemble Γ^* est décomposé en ensembles $\{A\colon A \in \Gamma^*/R\}$, donc d'après (5)

(7) $$\bigcup_{A \in \Gamma^*/R} F(A, 0) \subset \bigcup_{A \in \Gamma^*/R} F(A, x).$$

D'après (6) nous avons $F(A, 0) \subset A$ et $F(A, x) \subset A$, donc (7) nous donne

$$F(A, 0) \subset F(A, x)$$

pour chaque A de Γ^*/R et x de $\mathscr{G}^+$. En prenant ici $A = C$ nous recevons (4), ce qui montre que (5) entraîne (4).

Inversément nous montrons que (4) entraîne (5). Remarquons que d'après (I) il existe le prolongement $\tilde{F}\colon \Gamma \times \mathscr{G} \to \Gamma$ de F, remplissant (1). Dans ce cas l'ensemble

$$\tilde{E}_\alpha(\alpha) = \{x \in \mathscr{G}\colon \tilde{F}(\alpha, x) = \alpha\}$$

forme un sous-groupe de $\mathscr{G}$. Si $\tilde{F}(\alpha, \cdot)$ n'est pas une injection, alors $\tilde{E}_\alpha(\alpha) \neq \{0\}$ et puisque $\mathscr{G}$ est un groupe archimédien

(8) $$\bigwedge_{u \in \mathscr{G}} \bigvee_{v \in \tilde{E}_\alpha(\alpha)} u \leqslant v.$$

Soit à présent A de Γ^*/R tel que $F(\alpha, \cdot)$ n'est pas une injection pour α de A et soit x arbitraire de $\mathscr{G}^+$. D'après (8) nous avons $F(\alpha, v) = \tilde{F}(\alpha, v) = \alpha$ pour un $v \geqslant x$. De là d'après (6) puisque $v - x \in \mathscr{G}^+$

$$\alpha = F(\alpha, v) = F\big(F(\alpha, v-x), x\big) \in F(A, x),$$

donc $F(A,0) = A \subset F(A,x)$. Avec (4) cela nous donne

$$F(\Gamma,0) = F(F(\Gamma,0),0) \subset F(\Gamma^*,0) = F(\bigcup_{A \in \Gamma^*/R} A, 0) =$$

$$= \bigcup_{A \in \Gamma^*/R} F(A,0) \subset \bigcup_{A \in \Gamma^*/R} F(A,x) = F(\bigcup_{A \in \Gamma^*/R} A, x) = F(\Gamma^*, x) \subset F(\Gamma, x),$$

c.q.f.d.

La condition (5) est aussi évidemment équivalente à la suivante

$$\bigwedge_{x \in \mathscr{G}^+} F(\Gamma,0) = F(\Gamma,x)$$

puisque

$$F(\alpha,x) = F(F(\alpha,x),0).$$

Pour la même raison (4) est équivalent à la condition

$$C = F(C,0) = F(C,x)$$

pour chaque x de $\mathscr{G}^+$.

B. On sait ([2]) qu'on peut construire chaque solution F de (1) sur $\Gamma \times \mathscr{G}^+$ en supposant (3) comme suit:

1) Soit $f\colon \Gamma \to \Gamma$ une fonction telle que

$$\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} f(f(\alpha)) = f(\alpha).$$

2) Décomposons $f(\Gamma) = \bigcup_{k \in K} \Gamma_k$ en ensembles Γ_k non-vides, disjoints et tels que pour chaque k de K il existe une décomposition invariante $\{W_{ik}\}_{i \in J_k}$ d'un intervalle Δ_k de $\mathscr{G}$, pour lequel $\mathscr{G}^+ \subset \Delta_k$ et $\bar{\bar{J}}_k = \bar{\bar{\Gamma}}_k$.

3) Soit $h_k\colon \{W_{ik}\}_{i \in J_k} \to \Gamma_k$ une bijection et définissons $\bar{h}_k\colon \Delta_k \to \Gamma_k$ de la manière suivante

$$\bar{h}_k(x) = h_k(W_{ik}) \quad \text{pour } x \in W_{ik}.$$

4) Posons

$$F(\alpha,x) = \bar{h}_k[\bar{h}_k^{-1}(f(\alpha))+x] \qquad \text{pour } f(\alpha) \in \Gamma_k.$$

On sait aussi ([4]) que chaque décomposition W invariante de Δ_k doit être de la forme

1) il existe un intervalle Δ_k^*, dont chaque point forme une composante de W et pour lequel

$$\Delta_k^{**} := \Delta_k \setminus \Delta_k^* = \{x \in \mathscr{G}\colon \bigwedge_{y \in \Delta_k^*} x > y\},$$

2) les autres composantes de W ce sont les intersections de Δ_k^{**} et les classes d'équivalence à droit du groupe $\mathscr{G}$ par rapport à un sous-groupe $\mathscr{G}_k \neq \{0\}$.

Il peut arriver que $\Delta_k^* = \emptyset$ ou $\Delta_k^{**} = \emptyset$.

Nous allons démontrer que (3) *et* (5) *entraînent* (2) *pour* α *tel que* $f(\alpha) = F(\alpha,0) \in \Gamma_k$, *pour* k *tel que* $\Delta_k \neq \mathscr{G}$.

En effet il résulte de $\Delta_k \neq \mathscr{G}$ que (5) a lieu si et seulement si $\Delta_k^* = \emptyset$. Mais si $\Delta_k^* = \emptyset$ nous avons (2).

Si $\Delta_k = \mathscr{G}$ nous avons toujours (5) pour $\Gamma = \Gamma_k$, donc en général (3) et (5) n'entraînent pas (2). En effet prenons pour $\mathscr{G}$ le groupe additif des nombres réels R, désignons par Q le groupe additif des nombres rationnels et considérons la décomposition de l'ensemble $\Delta = R$ en ensembles $\Delta^* = R \setminus R^+$ et R^+/Q. Soit h une injection de cette décomposition à R et définissons $\bar{h}$ comme dans 3), $f(\alpha) = \alpha$ et $F(\alpha, x)$ comme dans 4). On voit que cette fonction remplit (1), (3) et (5), ne satisfaisant pas en même temps (2).

On démontre dans la note [3] que

(II) *La solution F de* (1) *sur $\Gamma \times \mathscr{G}^+$ est prolongeable avec l'agrandissement arbitraire de la fibre Γ si et seulement si* (2) *et* (3) *ont lieu.*

§ 3. Soit donné un sur-ensemble Γ_2 de $\Gamma (\Gamma \subset \Gamma_2)$. Nous démontrerons dans cette note que

(III) *la solution F de* (1) *sur $\Gamma \times \mathscr{G}^+$ est prolongeable avec l'agrandissement borné par Γ_2 de la fibre Γ sur $\mathscr{G}$ tout entier si et seulement si les conditions* (2) *et* (3) *ont lieu et de plus*

$$\bar{\bar{E}}_1 \cdot \bar{\bar{\mathscr{G}}} \leqslant \overline{\overline{\Gamma_2 \setminus \Gamma}}, \tag{9}$$

où E_1 désigne la famille de ces classes d'équivalence C de la relation R dans l'ensemble E qui ne remplissent pas la condition (4).

Démonstration "*si*". Si la condition (2) a lieu, donc d'après (II) il existe un sur-ensemble Γ_1 de Γ pour lequel F est prolongeable à la fonction $F_1 \colon \Gamma_1 \times \mathscr{G} \to \Gamma_1$, remplissant (1). Il résulte d'après la démonstration du théorème (II) dans la note [3] que l'ensemble $\Gamma_1 \setminus \Gamma$ est tel que

$$\overline{\overline{\Gamma_1 \setminus \Gamma}} = \bar{\bar{E}}_1 \cdot \bar{\bar{\mathscr{G}}}$$

et en outre arbitraire. On peut donc, d'accord avec (9), prendre $\Gamma_1 \setminus \Gamma$ comme un sous-ensemble de $\Gamma_2 \setminus \Gamma$, c.q f.d.

Démonstration "seulement si". Soit $F_1 \colon \Gamma_1 \times \Gamma \to \Gamma_1$ le prolongement de F, où $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, remplissant (1). Nous avons d'après (II) que (2) a lieu. Il suffit donc de démontrer que

$$\bar{\bar{E}}_1 \cdot \bar{\bar{\mathscr{G}}} \leqslant \overline{\overline{\Gamma_1 \setminus \Gamma}}. \tag{10}$$

Soit S un sélecteur de la famille E_1, c'est-à-dire $\overline{\overline{S \cap C}} = 1$ pour chaque C de E_1. Nous avons $\bar{\bar{E}}_1 = \bar{\bar{S}}$. Remarquons que $F_1(\alpha, \cdot)$ pour α de S c'est une injection. En effet soit $F_1(\alpha, x_1) = F_1(\alpha, x_2)$ et $x_1 < x_2$. Nous avons

$$F_1(F_1(\alpha, x_1), -x_1) = F_1(F_1(\alpha, x_2), -x_1)$$

et de là d'après (1)

$$F_1(\alpha, 0) = F_1(\alpha, x_2 - x_1).$$

Nous avons de là

$$F(\alpha, 0) = F(\alpha, x_2 - x_1)$$

puisque F_1 est un prolongement de F. La dernière relation nous donne $x_2 - x_1 = 0$ puisque $x_2 - x_1 \in \mathscr{G}^+$ et $\alpha \in E$, donc $F(\alpha, \cdot)$ est une injection.

Nous allons démontrer que pour chaque α de S il existe un élément $x(\alpha)$ de $\mathcal{G}$ tel que

(11) $$F_1(\alpha, x) \in \Gamma_1 \setminus \Gamma \quad \text{pour } x \leqslant x(\alpha).$$

Supposons pour un instant qu'il existe α_0 de S que pour chaque x_1 de $\mathcal{G}$ il existe $x_2 \leqslant x_1$ tel que

$$F_1(\alpha_0, x_2) \in \Gamma.$$

Nous avons dans ce cas

$$F_1(\alpha_0, x_1) = F_1(F_1(\alpha_0, x_2), x_1 - x_2) = F(F_1(\alpha_0, x_2), x_1 - x_2) \in \Gamma,$$

donc $F_1(\alpha_0, x) \in \Gamma$ pour chaque x de $\mathcal{G}$. De plus $F_1(\alpha_0, x) \in C$ pour chaque x de $\mathcal{G}$ et pour la classe C de E_1 et telle que $\alpha_0 \in C$. En effet si $x \geqslant 0$ cela est évident puisque

$$F_1(\alpha_0, x) = F(\alpha_0, x)$$

et si $x < 0$ dans ce cas $F_1(\alpha_0, x) = \beta \in \Gamma$ entraîne

$$F(\beta - x) = F_1(\beta_1 - x) = \alpha_0,$$

donc $\alpha_0 R \beta$ et $\beta \in C$. Soit dans la suite de la démonstration α un élément arbitraire de $F(C, 0)$, donc il existe un β de C tel que $\alpha = F(\beta, 0)$. Nous avons $\beta = F_1(\alpha_0, x_0)$ pour un x_0 de $\mathcal{G}$, puisque α_0 et β appartiennent à C et de là pour $x \geqslant 0$:

$$\alpha = F(\beta, 0) = F(F_1(\alpha_0, x_0), 0) = F_1(\alpha_0, x_0) = F(F_1(\alpha_0, x_0 - x), x)$$

et puisque $F_1(\alpha_0, x_0 - x) \in C$, donc $\alpha \in F(C, x)$.

Nous avons donc démontré que $F(C, 0) \subset F(C, x)$ pour $x \geqslant 0$, ce qui est en contradiction avec $C \in E_1$. La relation (11) est donc démontrée.

Remarquons que si $\alpha, \beta \in S$ et $\alpha \neq \beta$ donc

(12) $$F_1(\alpha, \mathcal{G}) \cap F_1(\beta, \mathcal{G}) = \varnothing.$$

En effet supposons pour la démonstration ad absurdum que

$$\gamma \in F_1(\alpha, \mathcal{G}) \cap F_1(\beta, \mathcal{G}).$$

Il existe donc deux élements x_1 et x_2 de $\mathcal{G}$ tels que

$$F_1(\alpha, x_1) = \gamma = F_1(\beta, x_2).$$

Soit $x_1 \leqslant x_2$. De là $F(\alpha, 0) = F(\beta, x_2 - x_1)$, donc $\beta R F(\alpha, 0)$, mais $\alpha R F(\alpha, 0)$, alors $\alpha R \beta$, qui est impossible puisque $\alpha, \beta \in S$ et $\alpha \neq \beta$. La relation (12) est donc démontrée.

L'ensemble des valeurs de la fonction $F_1(\alpha, \cdot)$ pour α de S, sur l'ensemble

$$\mathcal{G}_\alpha := \{x \in \mathcal{G} \colon x \leqslant x(\alpha)\},$$

où $x(\alpha)$ est de (11), a la même puissance que $\mathcal{G}_\alpha$ et $\overline{\overline{\mathcal{G}}}_\alpha = \overline{\overline{\mathcal{G}}}$, puisque $\mathcal{G}$, comme le groupe archimédien et complet, a la puissance χ_0 ou c. Ces ensembles de valeurs pour $\alpha \neq \beta$ sont disjoints d'après (12). Il en résulte d'après $\overline{\overline{E}}_1 = \overline{\overline{S}}$ la condition (10), c.q.f.d.

Pour démontrer que

(IV) *la solution F de* (1) *sur $\Gamma \times \mathcal{G}^+$ est prolongeable avec l'agrandissement donné Γ_2 de la fibre Γ à la solution F_2 de* (1) *sur $\Gamma_2 \times \mathcal{G}$ si et seulement si les conditions* (2), (3) *et* (9) *ont lieu,* il suffit de remarquer que d'après (III) si (2), (3) et (9) ont lieu dans ce cas il existe un ensemble Γ_1 tel que $\Gamma \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2$ et un prolongement de F à F_1: $\Gamma_1 \times \mathcal{G} \to \Gamma_1$, étant une solution de (1) et il suffit de poser

$$F_2(\alpha, x) = \begin{cases} F_1(\alpha, x) & \text{pour } (\alpha, x) \in \Gamma_1 \times \mathcal{G}, \\ \alpha & \text{pour } (\alpha, x) \in (\Gamma_2 \setminus \Gamma_1) \times \mathcal{G}. \end{cases}$$

Remarquons que (IV) entraîne (I), (II) et (III). En effet

a) si nous posons $\Gamma_2 = \Gamma$ dans (IV) nous aurons: $\overline{\overline{\Gamma_2 \setminus \Gamma}} = 0$ et de là la condition (9) est équivalente à la condition $E_1 = \emptyset$, qui est équivalente à (4), donc nous avons (I),

b) on peut toujours prendre l'ensemble Γ_2 tel que (9) a lieu, donc nous avons (II),

c) (IV) entraîne (III) évidemment.

§ **4.** Dans la note [1] on considère l'inégalité de translation sous la forme

$$F(F(\alpha, x), y) R F(\alpha, x+y), \tag{13}$$

où F: $\Gamma \times S \to \Gamma$ et R est une relation antisymétrique définie sur Γ.

On démontre dans cette note [1] que *si S forme un groupe abélien et*

$$\bigwedge_{\alpha, \beta \in \Gamma} F(\alpha, x) = \beta \Leftrightarrow F(\beta, -x) = \alpha, \tag{14}$$

dans ce cas F est une solution de (13) *si et seulement si F remplit* (1). Il en résulte que

(V) si S est une sous-structure du groupe $(\mathcal{G}, +)$ abélien, fermé par rapport à l'opération $+$, dans ce cas F: $\Gamma \times S \to \Gamma$ est une solution de (13) prolongeable à la solution de (13) sur $\Gamma \times \mathcal{G}$ et remplissante (14) si et seulement si F est une solution de l'équation (1) sur $\Gamma \times S$ prolongeable au $\Gamma \times \mathcal{G}$ et remplissante (14).

En posant ici $S = \mathcal{G}^+$, comme plus haut, et en prenant en considération (I), (II), (III) et (IV) nous recevons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une solution de (13) sur $\Gamma \times \mathcal{G}^+$ soit prolongeable à la solution de (13), remplissante (14), sur $\Gamma \times \mathcal{G}$ tout entier.

Remarquons enfin qu'une solution F de (13) sur $\Gamma \times S$ peut posséder un prolongement $\tilde{F}$ à $\Gamma \times \mathcal{G}$ qui n'est pas la solution de (1) et qui ne satisfait pas en même temps évidemment la condition (14). En effet posons $\Gamma = (-\infty, +\infty)$, $\mathcal{G}$ le groupe additif des nombres réels, $R =$ "$\geqslant$", $F(\alpha, x) = \alpha + x$, $S = \mathcal{G}^+$, $\tilde{F}(\alpha, x) = \alpha + |x|$.

Travaux cités

[1] Z. Moszner, *Sur l'inégalité de translation,* Demonstratio Mathematica XI, 4, 1978, p. 1095–1100.

[2] Z. Moszner, *Solution générale de l'équation de translation sur un demi-groupe,* Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie, Prace Matematyczne IX, 1979, p. 97–104.

[3] Z. Moszner, B. Nowak, *A condition on a extension of the solution of the translation equation and its applications,* Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Rzeszowie, z. 5/41, 1979, p. 77–91.

[4] Z. Moszner, *Décompositions invariantes du demi-groupe des éléments non-négatifs du groupe archimédien,* Tensor 34, 1, 1980, p. 8–10.

[5] Z. Moszner, *Sur le prolongement de la solution de l'équation de translation,* Ann. Pol. Math. XL, 1981.