ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
DCLXI UNIVERSITATIS IAGELLONICAE ACTA MATHEMATICA, FASCICULUS XXIV 1984

Sur la factorisation d'une fonction plate en l'origine

par Krystyna WACHTA

Le but de cette note est démontrer que l'idéal m^∞ des fonctions dérivables dans R^n qui sont plates en l'origine (c'est à dire qui s'annulent à l'origine avec toutes ses dérivées) est égal a son carré.

Je vais prouver que *pour chaque fonction* $\varphi \in m^\infty$ *il existe une fonction* $\psi \in m^\infty$ *positive dans* $R^n \setminus \{0\}$ *et telle que* $D^\beta(\varphi/\psi)(x) \to 0$. L'idée de la démonstration m'a été suggerée par Prof. A. Pliś. Prof. S. Łojasiewicz m'a dit que ce résultat pouvait aussi être obtenu comme le corrolaire des théorèmes plus généraux [1]. Soit $\varphi \in m^\infty$.

Il existe une suite des nombres $0 < a_k < 1$ telle que:

(1) $$a_{i+1} < \frac{a_i}{2} \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \ldots$$

et que pour chaque $k = 0, 1, 2, \ldots$ on a:

(2) $$|D^\alpha \varphi(x)| < |x|^{8k+4} \text{ lorsque } |\alpha| \leqslant k \quad \text{et} \quad |x|^2 \leqslant a_k,\ k = 0, 1, \ldots$$

(ou $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $|x|^2 = \sum_1^n x_1^2$).

Fixons une fonction $\varrho\colon R \to [0, 1]$ de classe C^∞ telle que:

$$\varrho(t) = 1 \quad \text{pour } t \leqslant \tfrac{1}{4}$$

et

$$\varrho(t) = 0 \quad \text{pour } t \geqslant \tfrac{3}{4}.$$

Nous allons montrer que la fonction définie par:

$$\psi(x) = \begin{cases} \left(\sum x_i^2\right)^k & \text{lorsque } a_k \leqslant \sum x_i^2 \leqslant \dfrac{a_{k-1}}{2}, \\ \varrho\left(\dfrac{\sum x_i^2 - \frac{a_k}{2}}{\frac{a_k}{2}}\right)\left(\sum x_i^2\right)^k + \left(1 - \varrho\left(\dfrac{\sum x_i^2 - \frac{a_k}{2}}{\frac{a_k}{2}}\right)\right)\left(\sum x_i^2\right)^{k+1} & \text{lorsque } \dfrac{a_k}{2} \leqslant \sum x_i^2 \leqslant a_k, \\ 0 \quad \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

répond à notre question. Or, la condition (2) implique:

$$|D^{\beta}\varphi(x)| < (\sum x_i^2)^{3k+1}\psi(x) \quad \text{lorsque } a_{k+1} \leqslant \sum x_i^2 \leqslant a_k,\ |\beta| \leqslant k,$$

Nous avons ensuite:

$$|D^{\alpha}\psi(x)| \leqslant C_{\alpha k}^1 \frac{\psi(x)}{(\sum x_i^2)^{|\alpha|}} \quad \text{lorsque } a_k \leqslant \sum x_i^2 \leqslant \frac{a_{k-1}}{2}, \tag{3}$$

et, comme on a:

$$\left|D^{\gamma}\left(\varrho\left(\frac{\sum x_i^2 - \frac{a_k}{2}}{\frac{a_k}{2}}\right)\right)\right| \leqslant C_{\gamma}^2 \left(\frac{1}{a_k}\right)^{|\gamma|} \leqslant C_{\gamma}^2 \frac{1}{(\sum x_i^2)^{|\gamma|}} \quad \text{lorsque } \sum x_i^2 \leqslant a_k,$$

la formule de Leibnitz nous donne:

$$|D^{\alpha}\psi(x)| \leqslant C_{\alpha k}^3 \frac{\psi(x)}{(\sum x_i^2)^{|\alpha|+1}} \quad \text{lorsque } \frac{a_k}{2} \leqslant x_i^2 \leqslant a_k.$$

Il en résulte que:

$$|D^{\alpha}\psi(x)| \leqslant C_{\alpha k} \frac{\psi(x)}{(\sum x_i^2)^{|\alpha|+1}} \quad \text{lorsque } a_{k+1} \leqslant \sum x_i^2 \leqslant a_k.$$

Observons que les constantes $C_{\alpha k}$ ne dépendent pas de la suite $\{a_k\}$, donc, en choisissant a_k suffisamment petits, on peut exiger que

$$|D^{\alpha}\psi(x)| \leqslant \frac{\psi(x)}{(\sum x_i^2)^{|\alpha|+2}} \quad \text{lorsque } \sum x_i^2 \leqslant a_k,\ |\alpha| \leqslant k. \tag{4}$$

Vu la formule:

$$D^{\alpha}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \sum_{\substack{\gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha \\ \delta_1 + \ldots + \delta_{|\gamma|} = \beta}} C_{\beta\delta_1\ldots\delta_{|\gamma|}} \frac{D^{\alpha_1}\psi \ldots D^{\delta_{|\gamma|}}\psi}{\psi^{|\gamma|}} \frac{D^{\alpha-\beta}\varphi}{\psi}$$

les conditions (3) et (4) entrainent

$$\left|D^{\alpha}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)(x)\right| \leqslant C_{\alpha} \sum x_i^2 \quad \text{lorsque } \sum x_i^2 \leqslant a_k,\ |\alpha| \leqslant k,$$

ce qui montre que $D^{\alpha}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$, quel que soit α.

Bibliographie

[1] J. Cl. Tougeron, *Idéaux des fonctions différentiables*, Springer, Berlin—Heidelberg—Nowy Jork 1972.

Received April 30, 1980.