ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

DCLXI UNIVERSITATIS IAGELLONICAE ACTA MATHEMATICA, FASCICULUS XXIV 1984

Sur la continuité de la section d'un ensemble sous-analytique

par Zofia DENKOWSKA et Jacek STASICA

Dans ce travail nous allons donner une condition nécessaire pour que la section d'un sous-ensemble sous-analytique de $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$ soit continue. La continuité d'une section en $s \in \boldsymbol{R}$ signifie que

$$m(E_t \dot{-} E_s) \to 0 \quad \text{lorsque } t \to s,\ t \in \boldsymbol{R}$$

ou

$$E_t = \{x \in \boldsymbol{R}^n \colon (x, t) \in E\},$$
$$E_t \dot{-} E_s = (E_t - E_s) \cup (E_s - E_t)$$

et m est la mesure de Lebesgue dans $\boldsymbol{R}^n$.

Pour les définitions et les propriétés des ensembles sous-analytiques regardez [1], [2], [3].

Notons par $\operatorname{fr} E$ l'ensemble $\bar{E} - \operatorname{int} E$.

On va alors démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit* $E \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$ *un ensemble sous-analytique. Si* $m(E_t \dot{-} E_0) \to 0$ *lorsque* $t \to 0$, $t \in \boldsymbol{R}$, *on a* $m((\operatorname{fr} E)_0) = 0$.

Ce théorème est une généralisation du théorème analogue prouvé dans [4] pour les ensembles semi-analytiques. Comme on a montré dans [4] que la condition ci-dessus est suffisante pour les ensembles compacts, on a alors

CORROLAIRE. *Soit* $E \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$ *un sous-analytique compact. Alors* $m(E_t \dot{-} E_0) \to 0$ *lorsque* $t \to 0$ *si et seulement si* $m((\operatorname{fr} E)_0) = 0$.

OBSERVATION. *La condition* $m((\operatorname{fr} E)_0) = 0$ *est équivalente à la condition* $int((\operatorname{fr} E)_0) = 0$. en vertu du lemme suivante:

LEMME. *Pour chaque sous-analytique* $E \subset \boldsymbol{R}^n$ *on a* $\operatorname{int} E = 0$ *si et seulement si* $m(E) = 0$.

En effet, selon le théorème 3.3 du travail [5] chaque ensemble E sous-analytique relativement compact est une réunion finie des sous-ensembles sous-analytiques B_i de la forme

$$B_i = \{u+\varphi_i(u)\colon\ u\in\Omega_i\}$$

où Ω_i est ouvert dans U_i, $\boldsymbol{R}^n = U_i\oplus V_i$, U_i et V_i étant les sous-espaces vectorielles de $\boldsymbol{R}^n$, $\dim U_i \leqslant \dim E$, $\varphi_i\colon \Omega_i\to V_i$ sont des fonctions analytiqües vérifiantes $|d_u\varphi_i|\leqslant K_i$ dans Ω_i avec une constante quelconque K_i.

Or, pour chaque boule $B\subset\boldsymbol{R}^n$ l'ensemble $B\cap E$ est sous-analytique relativement compact et $\dim B\cap E<n$ parce que $\operatorname{int}(B\cap E) = 0$. Alors $B\cap E = \bigcup_{i=1}^{s} B_i$, avec B_i comme ci-dessus, donc $m(B\cap E) = 0$ et par conséquent $m(E) = 0$.

Démonstration du théorème. Observons que pour un sous-ensemble K de $\boldsymbol{R}^n$ on a

$$E_t\cap K\dot{-}E_0\cap K = (E_t\dot{-}E_0)\cap K\subset E_t-E_0$$

alors

$$m(E_t\dot{-}E_0)\to 0 \qquad \text{lorsque } t\to 0 \text{ implique que}$$

$$m(E_t\cap K\dot{-}E_0\cap K)\to 0 \qquad \text{lorsque } t\to 0 \text{ pour chaque } K\subset\boldsymbol{R}^n.$$

Supposons maintenant que $\operatorname{int}\big((\operatorname{fr}E)_0\big)\neq\emptyset$. Nous allons montrer qu il'existe alors un ensemble $K\subset\boldsymbol{R}^n$ tel que

$$m(E_t\cap K\dot{-}E_0\cap K) \text{ ne converge pas vers } 0 \text{ lorsque } t\to 0\,.$$

Observons que les ensembles $(\operatorname{fr}E)_0$ et $\{t=0\}\cap\operatorname{fr}E$ étant analytiquement isomorphes, $\operatorname{int}(\{t=0\}\cap\operatorname{fr}E)\neq\emptyset$ dans $\boldsymbol{R}^n\times(0)$.

Prenons maintenant la stratification $\mathscr{N} = \{\Gamma_i\}$ de $\boldsymbol{R}^{n+1}$ compatible avec les ensembles E, $\boldsymbol{R}^{n+1}-E$ et $\{t=0\}\cap\operatorname{fr}E$. Une telle stratification existe et sa construction et propriétés sont donnés dans [3]. Comme $\dim(\{t=0\}\cap\operatorname{fr}E) = n$, il existe un membre de la stratification $\mathscr{N}$, disons Γ_0, tel que

$$\Gamma_0\subset\{t=0\}\cap\operatorname{fr}E, \qquad \dim\Gamma_0 = n$$

Il y a deux cas possibles:

(i) $\Gamma_0\subset E$,

(ii) $\Gamma_0\cap E = 0$.

Considérons d'abord le cas (i). Observons que $\Gamma_0\subset\overline{\boldsymbol{R}^{n+1}-E}$. Alors il existe un membre Γ' de la stratification $\mathscr{N}$ tel que

$$\Gamma'\subset\boldsymbol{R}^{n+1}-E \quad \text{ et } \Gamma_0\subset\overline{\Gamma}'.$$

Or,

$$\Gamma_0\cap(\boldsymbol{R}^{n+1}-E) = 0\,,$$

alors

$$\Gamma_0\subset\overline{\Gamma}'-\Gamma'$$

Forcément $\dim\Gamma' = n+1$. On peut répéter ce raisonnement dans le cas (ii) et on obtient:

Dans le cas (i),

quand $\Gamma_0\subset E$, il existe $\Gamma'\in\mathscr{N}$ tel que

$$\boldsymbol{\Gamma'\subset R^{n+1}-E,\ \Gamma_0\subset\overline{\Gamma}'\setminus\Gamma'} \quad \textbf{et } \boldsymbol{\dim\Gamma' = n+1}$$

Dans le cas (ii),
quand $\Gamma_0 \cap E = \emptyset$, il existe $\Gamma'' \in \mathcal{N}$ tel que

$$\Gamma'' \subset E,\ \Gamma_0 \subset \overline{\Gamma}'' \setminus \Gamma'' \quad \text{et } \dim \Gamma'' = n+1 .$$

Prenons maintenant $(b, 0) \in \Gamma_0$. Observons que dans chaque stratification la réunion $\bigcup_{\dim \Gamma_i \leqslant k} \Gamma_i$ est fermée parce que

$$\overline{\bigcup_{\dim \Gamma_i \leqslant k} \Gamma_i} = \bigcup_{\dim \Gamma_i \leqslant k} \Gamma_i \cup \bigcup_{\dim \Gamma_i \leqslant k} \overline{\Gamma}_i \setminus \Gamma_i = \bigcup_{\dim \Gamma_i \leqslant k} \Gamma_i \cup \bigcup_{\dim \Gamma_j < k} \Gamma_j \subset \bigcup_{\dim \Gamma_i \leqslant k} \Gamma_i .$$

Alors $\bigcup_{\dim \Gamma_i \leqslant n-1} \Gamma_i$ est fermée et il existe un voisinage Q de (b, 0) tel que

$$Q \cap \bigcup_{\dim \Gamma_i \leqslant n-1} \Gamma_i = \emptyset ,$$

parce que

$$(b, 0) \notin \bigcup_{\dim \Gamma i \leqslant n-1} \Gamma_i .$$

Soit Q une boule dans $\boldsymbol{R}^n$. Nous pouvons admettre que Q n'intersecte aucun membre de dimension n sauf Γ_0, comme $(b, 0) \notin \overline{\Gamma}$ pour aucun membre de dimension n sauf Γ_0. Cela est vrai parce que si $\dim \Gamma = n$ et $\Gamma \neq \Gamma_0$, alors $(b, 0) \in \Gamma$, les membres de stratification étant disjoint et $(b, 0) \notin \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ parce que $(\overline{\Gamma} - \Gamma) \cap Q = 0$ par hypothèse.

Prenons maintenant un voisinage connexe V de b dans $\boldsymbol{R}^n$. Comme Q est ouvert et $(b, 0) \in Q$, il existe $\varepsilon \in \boldsymbol{R}$, $\varepsilon > 0$ tel que $V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset Q$. Observons, que

$$Q = \Gamma_0 \cap Q \cup \bigcup_{\dim \Gamma_i = n+1} \Gamma_i \cap Q .$$

Les ensembles $V \times (-\varepsilon, 0)$ et $V \times (0, \varepsilon)$ n'intersectent pas Γ_0 alors

$$V \times (-\varepsilon, 0) \subset \bigcup_{\dim \Gamma_i = n+1} \Gamma_i \cap Q$$

et

$$V \times (0, \varepsilon) \subset \bigcup_{\dim \Gamma_i = n+1} \Gamma_i \cap Q .$$

Or, les ensembles $V \times (-\varepsilon, 0)$, $V \times (0, \varepsilon)$ sont connexes et les ensembles $\Gamma_i \cap Q$ $(\dim \Gamma_i = n+1)$ sont ouverts, sous-analytiques et relativement compacts, ils ont le nombre fini de composantes connexes et ces composantes sont ouvertes. Alors chacun des ensembles $V \times (0, \varepsilon)$, $V \times (-\varepsilon, 0)$ est contenu dans un seul membre de dimension $n+1$.

Revenons maintenant aux deux cas considérés dans notre démonstration. Prenons d'abord le cas (i). En vertu de l'inclusion

$$V \times (0) \subset \Gamma_0 \subset \overline{\Gamma}' \setminus \Gamma$$

on obtient que

$$V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \Gamma' \neq \emptyset$$

parce que $V \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ est un voisinage de $(b, 0) \in \Gamma_0 \subset \overline{\Gamma}'$. Donc on peut admettre que, par exemple,

$$V \times (0, \varepsilon) \cap \Gamma' \neq \emptyset$$

(le cas où $V \times (-\varepsilon, 0) \cap \Gamma' \neq \emptyset$ étant analogue).
Comme $\Gamma_0 \subset E$ on a $E_0 \cap V = V$, puisque $V \times (0) \subset \Gamma_0 \subset E$.

L'inclusion

$$V \times (0, \varepsilon) \subset \Gamma' \subset \boldsymbol{R}^{n+1} - E$$

implique $E_t \cap V = 0$ lorsque $t \in (0, \varepsilon)$. Ainsi on obtient

$$m\big((E_0 \dot{-} E_t) \cap V\big) = m\big((E_0 - E_t) \cap V\big) = m(V) > 0 \quad \text{lorsque } t \in (0, \varepsilon).$$

Nous avons trouvé dans le cas (i) un ensemble $V \subset \boldsymbol{R}^n$ tel que

$$m\big((E_t \dot{-} E_0) \cap V\big)$$

ne tend pas vers 0 lorsque $t \to 0$.

Passons maintenant au cas (ii), i.e. au cas où $\Gamma_0 \cap E = \emptyset$. Prenons le membre Γ'' dont nous avons montré l'existence. L'un des ensembles $V \times (0, \varepsilon)$, $V \times (-\varepsilon, 0)$ est contenu dans Γ'', ce qui resulte d'un raisonnement analogue à celui du cas précédent. Supposons que ce soit $V \times (0, \varepsilon)$. On a donc

$$V \times (0, \varepsilon) \subset \Gamma'' \subset E,$$

d'où il résulte $E_t \cap V = V$ lorsque $t \in (0, \varepsilon)$.

D'autre part, $E_0 \cap V = \emptyset$ puisque $V \subset \Gamma_0$ et $\Gamma_0 \cap E = \emptyset$. Dans le cas (ii) on obtient donc

$$m\big((E_t \dot{-} E_0) \cap V\big) = m\big((E_t - E_0) \cap V\big) = m(V) > 0 \quad \text{lorsque } t \in (0, \varepsilon).$$

Il en résulte que

$$m\big((E_t \dot{-} E_0) \cap V\big) \quad \text{ne tend pas vers 0 lorsque } t \to 0,$$

ce qui termine la démonstration.

Bibliographie

[1] Z. Denkowska, S. Łojasiewicz, J. Stasica, *Certaines propriétés des ensembles sous-analytiques*, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Mat. Phys. Astr.

[2] Z. Denkowska, S. Łojasiewicz, J. Stasica, *Sur le théorème du complémentaire*, ibidem.

[3] Z. Denkowska, S. Łojasiewicz, J. Stasica, *La stratification des ensembles sous-analytiques*, ibidem.

[4] Z. Denkowska, *La continuité de la section d'un ensemble semi-analytique et compact*, Ann. Pol. Math. XXXVII (79) p. 13-24.

[5] J. Stasica, *Whitney's property for sub-analytic sets*, Zesz. Naukowe UJ, Prace Mat.

Received April 24, 1980.