ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
DCLXI UNIVERSITATIS IAGELLONICAE ACTA MATHEMATICA, FASCICULUS XXIV 1984

О сопряженности в группах классов $K^{(2)}_{\frac{1}{4}}$ и $K_{\frac{1}{6}}$

Марек Паласиньски

В настоящей работе будем употреблять понятия и обозначения из [5]. М. Д. Гриндлингер [1] и позже С. Липшуц [3] доказали, что если в группе Γ из класса $K_{1/8}$ существует слово бесконечного порядка, то в Γ существует бесконечно много попарно несопряженных слов. С. Липшуц высказал гипотезу, что этим свойством обладают также другие группы с ограниченной мерой налегания определяющих слов. Докажем, что это действительно так, т. е. что этим свойством обладают группы классов $K^{(2)}_{1/4}$ и $K_{1/6}$. Ясно, что классы $K^{(2)}_{1/4}$ и $K_{1/6}$ существенно шире класса $K_{1/8}$.

Напомним некоторые результаты, полученные М. Д. Гриндлингером и С. Липшуцом, нужные для дальнейших рассуждений.

М. Д. Гриндлингер в [2] указал алгоритм, решающий проблему сопряженности для групп класса $K_{1/6}$. Этот алгоритм состоит в следующем:

Пусть группа Γ принадлежит классу $K_{1/6}$ и X, Y слова группы Γ. Для того, чтобы узнать, сопряжены ли слова X и Y, мы сначала записываем X на окружности, затем

a) сокращаем и

b) заменяем C на D, если существует определяющее слово R_i, вида $R_i \,\bar{\circ}\, CD^{-1}$ и $\partial(C) > \frac{1}{2}\partial(R_i)$.

Когда уже невозможно применить операцию a) ни b), мы разбиваем полученное круговое слово между всякой парой рядом стоящих букв, получая конечный список $A_1, \ldots, A_r$.

c) если существует определяющее слово $R_i \,\bar{\circ}\, B^{-1}A_jBC^{-1}$ такое, что $\partial(C) < \frac{1}{3}\partial(R_i) < \partial(A_j)$ и все круговые перестановки $C_1, \ldots, C_s$ слова C несократимые, то заменяем список слов $A_1, \ldots, A_r$ списком $C_1, \ldots, C_s$.

Обозначим слова в окончательном списке через $X_1, \ldots, X_p$. Из слова Y получим аналогичным образом список слов $Y_1, \ldots, Y_q$. Легко заметить, что X_i сопряженное X, Y_i сопряженное Y и операции a), b), c) не применимы к словам X_i и Y_j.

Случай 1. Каждое из множеств слов $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ является пустым. Тогда $X = Y = 1$ и X и Y сопряженные.

Случай 2. Точно одно из множеств слов $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ является пустым. Тогда точно одно из слов X, Y равно единице, откуда следует, что X и Y не сопряженные.

Случай 3. Ни $\{X_i\}$, ни $\{Y_i\}$ не является пустым. Тогда слова X и Y сопряжены тогда и только тогда, когда существуют i, $1 \leqslant i \leqslant p, j, 1 \leqslant j \leqslant q$ и такое слово T, что

$$X_i = TY_jT^{-1} \quad \text{и} \quad \partial(T) < \tfrac{2}{3} \max_{R_i \text{ опр. сл. гр. } \Gamma} \{\partial(R_i)\}. \tag{1}$$

С. Липшуц в работе [4] доказал следующие две леммы:

Лемма 1. (см. [4], л. 3). *Пусть Γ группа класса $K_{1/6}$. Пусть W слово длины n не равно единице в группе Γ. Если слово U сильно несократимо и $U = W$ в Γ, то*

$$\partial(U) \leqslant rn,$$

где r длина самого длинного определяющего слова группы Γ.

Лемма 2. (см. [4], л. 4). *Пусть Γ группа класса $K_{1/6}$. Пусть циклически сильно несократимое слово W из группы Γ имеет бесконечный порядок. Тогда верны следующие утверждения:*

1. *если слово W^2 является циклически сильно несократимым, то слово W^k сильно несократимо для всех целых k.*
2. *если слово W^2 не является циклически сильно несократимым, то существует циклическая перестановка AB слова W и определяющее слово R такие, что $R \,\bar{\circ}\, ABAT^{-1}$, где $\partial(T) < \frac{1}{2}\partial(R)$ и слово $(TB)^k$ сильно несократимо для всех целых k.*

В дальнейшем нам понадобится следующее следствие:

Следствие 1. *Пусть Γ группа из класса $K^{(2)}_{1/4}$ или $K_{1/6}$. Пусть слово V из группы Γ имеет бесконечный порядок. Тогда слово V^2 сопряжено со словом U, где U и все его степени сильно несократимы.*

Доказательство. Пусть V слово бесконечного порядка. Тогда существует циклически сильно несократимое слово W такое, что слово V сопряжено со словом W в группе Γ. Следовательно V^2 сопряжено с W^2. По лемме 3 из [5], если Γ группа из $K^{(2)}_{1/4}$, и по лемме 1, если Γ группа из $K_{1/6}$, слово W^k сильно несократимо для всех целых k или существует циклическая перестановка AB слова W и определяющее слово R такие, что $R \,\bar{\circ}\, ABAT^{-1}$ и слово $(TB)^k$ сильно несократимо для всех целых k.

Если слово W^k сильно несократимо для всех целых k, то в качестве искомого слова U берем слово W^2. Если слово W^k не является сильно несократимым для некоторого целого k, то в качестве слова U берем слово TB.

Следствие 1 доказано полностью.

Следующая лемма является аналогом леммы 4 из [5] для групп класса $K_{1/6}$.

Лемма 3. *Пусть Γ группа класса $K_{1/6}$. Пусть слова U и W принадлежат группе Γ. Пусть слово W является словом в специальном виде и слово U сопряжено со словом W^m при некотором целом m. Тогда*

$$|m|,\ \partial(W)<r\left(\tfrac{4}{3}r+2\partial(U)\right).$$

где r длина самого длинного определяющего слова группы Γ.

Доказательство. Так как слово U сопряжено со словом W^m, то U^2 сопряжено с W^{2m}. Тогда (1) верно для X_i полученного из U^2 и Y_j полученного из W^{2m}. Из построения слова X_i следует, что

$$\partial(X_i)\leqslant\partial(U^2)\leqslant 2\partial(U)\,. \tag{2}$$

Так как слово Y_j сильно несократимо и $Y_j = T^{-1}X_iT$, то из леммы 1 следует, что

$$\partial(Y_j)\leqslant r\partial(T^{-1}X_iT)\,,$$

откуда в виду (2) и $\partial(T)<\frac{2}{3}r$ получаем

$$\partial(Y_j)<r\left(\tfrac{4}{3}r+\partial(X_i)\right)\leqslant r\left(\tfrac{4}{3}r+2\partial(U)\right). \tag{3}$$

Теперь достаточно рассмотреть следующих три случая

1. $\partial(W)\geqslant r$;
2. $\partial(W)<r$ и $m>r$;
3. $\partial(W)<r$ и $m\leqslant r$.

Это делается аналогично как и в доказательстве леммы 4 из [5], употребляя в доказательстве лемму 2.

Теперь можем уже приступить к доказательству следующей теоремы:

Теорема. *Пусть Γ группа одного из классов $K_{1/4}^{(2)}$ или $K_{1/6}$, X слово бесконечного порядка из Γ и m, n целые числа. Если $|m| \neq |n|$, то слова X^m и X^n не сопряжены.*

Доказательство. Пусть Γ группа из класса $K_{1/6}$. В силу следствия 1 слово X^2 сопряжено со словом V таким, что V и все его степени сильно несократимы. Допустим, что $|m|>|n|$ и слово X^m сопряжено со словом X^n. Тогда X^{2m} сопряжено с X^{2n}, откуда следует, что V^m сопряжено с V^n. Пусть $V^m = T^{-1}V^nT$. Докажем, что для любого целого положительного s слово V^{m2^s} сопряжено со словом V^{n2^s}. Будем доказывать индукцией по s. Пусть $s = 1$. Тогда

$$V^{m^2} = \underbrace{V^mV^m\ldots V^m}_{m} = T^{-1}V^nTT^{-1}V^nT\ldots T^{-1}V^nT = T^{-1}V^{mn}T =$$
$$= T^{-1}(V^m)^nT = T^{-1}(T^{-1}V^nT)^nT = T^{-2}V^{n^2}T^2,$$

т. е. слова V^{m^2} и V^{n^2} сопряжены.

Допустим теперь, что слова V^{m2^i} и V^{n2^i} сопряжены для всех $i\leqslant s$. Докажем, что слова $V^{m2^{s+1}}$ и $V^{n2^{s+1}}$ сопряжены. Имеем

$$V^{m2^{s+1}} = (V^{m2^s})^{m2^s}\,.$$

Так как слова V^{m2^s} и V^{n2^s} сопряжены, то для некоторого слова T_1

$$V^{m2^s} = T_1^{-1} V^{n2^s} T_1 ,$$

откуда получаем

$$(V^{m2^s})^{m2^s} = (T_1^{-1} V^{n2^s} T_1)^{m2^s} = T_1^{-1} V^{n2^s m2^s} T_1 = T_1^{-1} (V^{m2^s})^{n2^s} T_1 =$$
$$= T_1^{-1} (T_1^{-1} V^{n2^s} T_1)^{n2^s} T_1 = T_1^{-2} (V^{n2^s})^{n2^s} T_1^2 = T_1^{-2} V^{n2^{s+1}} T_1^2 ,$$

т. е.

$$V^{m2^{s+1}} = T_1^{-2} V^{n2^{s+1}} T_1^2 .$$

Следовательно, $V^{m2^{s+1}}$ сопряжено с $V^{n2^{s+1}}$ для всех положительных чисел s. Из леммы 3, взяв в качестве W^m слово V^{m2^s} и в качестве U слово V^{n2^s}, получаем

(4) $$|m|^{2^s},\ \partial(V) \leqslant r\left(\tfrac{4}{3}r + 2\partial(V^{n2^s})\right) \leqslant r\left(\tfrac{4}{3}r + 2|n|^{2^s}\partial(V)\right)$$

для всех положительных чисел s. Так как $|m| > |n|$, то, при достаточно большом s неравенство (4) становится ложным. Противоречие. В случае, когда группа Γ принадлежит классу $K_{1/6}$ теорема доказана.

Случай, когда группа Γ принадлежит классу $K_{1/4}^{(2)}$ рассматривается аналогично. Теорема доказана полностью.

Литература

[1] М. Д. Гриндлингер, *О проблеме сопряженности и совпадения с антицентром в теории групп.* Сиб. Мат. Журнал 7,4 (1966), 785–803.

[2] M. D. Greendlinger, *On Dehns algorithms for the conjugacy and word problem with applications*, Comm. Pure and Appl. Math. 13 (1960), 641-677.

[3] S. Lipschutz, *On conjugacy in greendlinger eight-groups*, Archiv der Math. 23, 2 (1972), 121-124.

[4] S. Lipschutz, *An extension of greendlingers result on the word problem*, Proc. Amer. Math. Soc. 15, 1 (1964), 37-43.

[5] М. Паласиньски, *Решение некоторых алгоритмических проблем для групп класса* $K_{1/4}^{(2)}$, в этом сборнике.

Received November 2, 1978,