UNIVERSITATIS IAGELLONICAE ACTA MATHEMATICA, FASCICULUS XXV

1985

Stratification des ensembles sous-analytiques avec les propriétés (A) et (B) de Whitney

par Zofia DENKOWSKA, Krystyna WACHTA et Jacek STASICA

Etant donné un sous-analytique E d'une variété analytique M on peut construire ([1]) une stratification de M en feuilles sous-analytiques * compatible avec E. On voudrait alors avoir une stratification avec les propriétés (A) et (B), comme pour un semi-analytique (cf. [2]). Rappelons qu'une stratification avec la propriété (A) (resp. (B)) est une telle stratification que chaque couple de strates Γ, Γ' tel que $\Gamma \subset \overline{\Gamma'} \setminus \Gamma'$ jouit de la propriété (A) (resp. (B)) de Whitney dans chaque point de Γ. Pour les définitions des propriétés (A) et (B) voir par exemple [7].

Dans ce travail nous allons donner la construction d'une telle stratification. L'idée principale de notre démonstration a été inspirée par le travail [2]. Tous les théorèmes sur les ensembles sous-analytiques que nous allons utiliser peuvent être trouvés dans [4], [5], et [8]. Pour les théorèmes concernants les ensembles semi-analytiques voir [7].

Définition. Soient E, F deux sous-analytiques d'une variété analytique M, soit $E \subset \bar{F} \setminus F$ et $x \in E$. On dit que *les ensembles* E, F *jouissent de la propriété* (B) *de Whitney dans* x si x est un point régulier de E et de F et les variétés analytiques $E \cap U$, $F \cap V$, où U et V sont des voisinages appropriés de x, jouissent de la propriété (B) dans x.

Remarque. Le condition (B) de Whitney implique la condition (A) (voir par exemple [9]).

LEMME 1. *Soient* X, Y *des espaces vectoriels de dimensions finies,* E *un ensemble sous-analytique et borné dans* $X \times Y$, π: $X \times Y \to X$ *la projection naturelle. Posons* $E_x = \pi^{-1}(x) \cap E$. *Si pour chaque* $x \in \pi(E) \dim E_x \geqslant r$, *alors* $\dim E \geqslant r + \dim \pi(E)$.

Démonstration. Selon le lemme 1 de [4] l'ensemble E peut être représenté comme une réunion des feuilles semi-analytiques $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$, telles que $\operatorname{rk} \pi_{\Gamma_j}$ est constant. Pour chaque s l'ensemble $\bigcup_{j=1}^{\infty} \{\Gamma_j \colon \operatorname{rk} \pi_{\Gamma_j} = s\}$ est sous-analytique, alors l'ensemble

$$W = \bigcup \{\pi(\Gamma_j) \colon \operatorname{rk} \pi_{\Gamma_j} < \dim \pi(E)\}$$

est sous-analytique aussi et par conséquent (Prop. 1, [4]) $\dim W < \dim \pi(E)$.

* Une feuille sous-analytique c'est une sous-variété analytique de M qui est sous-analytique (cf. [6]).

Prenons un point $a \in \pi(E) \setminus W$. Alors $E_a = \bigcup \{(\Gamma_j)_a: \mathrm{rk}\,\pi_{\Gamma_j} = \dim \pi(E)\}$. Par l'hypothèse et par Prop. 1 de [4] il existe un membre de cette réunion tel que $\dim(\Gamma_j)_a \geqslant r$. Comme $\mathrm{rk}\,\pi_{\Gamma_j} = \dim \pi(E)$, nous avons $\dim E \geqslant \dim \Gamma_j = \dim(\Gamma_j)_a + \mathrm{rk}\,\pi_{\Gamma_j} = r + \dim \pi(E)$.

Lemme 2. *Soit A une feuille sous-analytique de dimension k dans un espace vectoriel M de dimension finie, soit $a \in A$. Alors l'angle $\delta(x)$ entre $x-a$ et l'espace tangent $T_x A$ de A en $x \in A$ tend vers le zéro lorsque $x \neq a$ tend vers a.*

Démonstration. La fonction $G_k M \times M \setminus \{0\} \in (L, u) \to \sigma(L, u)$ où $G_k M$ est grassmannienne et $\sigma(L, u)$ l'angle entre u et sous-espace L est semi-algébrique. En vertu de [6] la fonction τ: $A \ni x \to T_x A \in G_k M$ est sous-analytique alors la fonction $A \ni x \to T_x A \in$ $\in G_k M$ est sous-analytique alors la fonction $A \ni x \to \cos\delta(x)$ est sous-analytique. Prenons maintenant $v < 1$ et l'ensemble

$$E_0 = \{x \in E: \cos\delta(x) < v\}$$

L'ensemble E_0 est sous-analytique. Supposons que $a \in E_0$. Alors (cf. [4]) il existe un arc (s)-analytique au bout a contenu dans E_0. Mais un tel arc est de classe C^1 en a, ce qui donne la contradiction. Alors $a \in E_0$, d'où $\lim\limits_{\substack{x \in E \\ x \to a}} \cos\delta(x) = 1$.

Lemme 3. *Soit X un espace vectoriel de dimension finie, $X = U \oplus V$ est la somme orthogonale de deux sous-espaces U et V, $\dim U = p$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, soient Ω un ouvert dans U et $\varphi\colon \Omega \to V$ une fonction analytique avec $d_x\varphi$ borné dans Ω (i.e. il existe une constante C telle que pour chaque $x \in \Omega |d_x\varphi| \leqslant C$). Supposons que l'ensemble $W = \{u + \varphi(u),\ u \in \Omega\}$ est sous-analytique et relativement compact dans X et que $\dim(\overline{W} \setminus W) = p-1$. Alors il existe un sous-analytique fermé $E \subset X$ tel que $\dim E \leqslant p-2$ et pour chaque $x \in \overline{W} \setminus (W \cup E)$ les ensembles $\overline{W} \setminus W$, W jouissent de la propriété* (B) *dans x.*

Démonstration. D'après [8] il existe un ensemble $F \subset X$ sous-analytique et fermé dans X tel que $\dim F \leqslant p-2$ et $\dim(\overline{W} \setminus (W \cup F)) = p-1$ (et l'ensemble $p = \overline{W} \setminus (W \cup F)$ est une feuille sous-analytique). Observons que pour $x \in P$ on a $T_x P \cap V = \{0\}$, où $T_x P$ est l'espace tangent en x. En effet, soit w un vecteur de $T_x P$, $\|w\| = 1$. Alors il existent des séquences $\{w_n\} \subset W$, $\{\alpha_n\} \subset R$ telles que $\alpha_n(x_n - a) \to w$ lorsque $n \to \infty$. Selon le lemme 2 (appliqué a P qui est localement une réunion finie des feuilles sous-analytiques, (cf. [1]) l'angle $\sigma(x_n - a, T_{x_n} P)$ tend vers 0 lorsque $x_n \to a$ alors $w \notin V$ parce que $T_{x_n} P = d_{\pi(x_n)}\varphi$, où $\pi\colon X \to U$ est la projection naturelle et $|d_{\pi(x_n)}| \leqslant C$ par l'hypothèse. Prenons maintenant $x \in P$. On peut trouver un voisinage G de x dans X tel que $\pi_{\overline{G \cap W}}$ est un homéomorphisme sur $\pi(\overline{G \cap W})$. Posons $\tilde{W} = G \cap W$ et observons que l'ensemble $\overline{\pi(\tilde{W})} \setminus \pi(\tilde{W})$ est une sous-variété analytique de dimension $p-1$ dans U. Alors il est localement décrit par un isomorphisme analytique. Plus précisément: pour chaque $y \in \overline{\tilde{W}} \setminus \tilde{W}$ il existe un voisinage Q de $\pi(x)$ dans U et un isomorphisme analytique $h\colon Q \to (-1, 1)^p$ tel que $h^{-1}((-1, 1)^{p-1} \times \{0\}) =$ $= Q \cap (\overline{\pi(\tilde{W})} \setminus \pi(\tilde{W}))$. Par conséquent l'ensemble $Q \cap \pi(\tilde{W})$ n'a pas plus que deux composantes connexes et il en est de même avec $\pi^{-1}(Q) \cap \tilde{W}$. Notons par W_1, W_2 les composantes connexes de $\pi^{-1}(Q) \cap \tilde{W}$ et prenons l'application Φ: $W \ni x \to d_{\pi(x)}\varphi \in$ $\in L(U, V)$. Alors pour chaque $x \in P$ l'ensemble $\bar{\Phi} \cap (\{x\} \times L(U, V))$ n'a pas plus que deux composantes connexes. L'ensemble Φ est sous-analytique (cf. [6]) et rel. compact dans $X \times L(U, V)$ et $\dim(\bar{\Phi} - \Phi) \leqslant p-1$ (cf. [4]). Ces derniers faits impliquent que l'ensemble

$$H = \{x \in P;\ \dim(\bar{\Phi} \cap \{x\} \times L(U, V)) > 0 \quad \text{est égal à l'ensemble}$$

$$\{x \in P;\ \#(\bar{\Phi} \cap \{x\} \times L(U, V)) \geqslant 3, \quad \text{d'où on obtient que } H \text{ est sous-analytique.}$$

En vertu du lemme 1 $\dim H \leqslant p-2$ parce que $\dim \Phi = P = p-1$. Posons $E = H \cup F$. Nous allons montrer que E est l'ensemble cherché. En effet, si $x \in \bar{W} \setminus (W \cup E) = P \setminus H$, on peut trouver un voisinage G de x dans X tel que $G \cap (\bar{W} \setminus W) \subset P \setminus H$. Alors les applications φ_i: $W_i \ni x \to d_{\pi(x)}\varphi \in L(U, V)$, $i = 1, 2$, peuvent être prolongées aux fonctions continues sur $W_i \cap \pi^{-1}(Q)$, d'où il résulte que les ensembles $\bar{W} \setminus W$, W jouissent de la propriété (B) dans chaque point de $\bar{W} \setminus (W \cup E)$. Maintemamt nous pouvons prouver le lemme central de ce travail, ce qui nous permettra de construire la stratification d'une façon analogue à celui de [2].

LEMME 4. *Soient N_0, N des feuilles sous-analytiques dans un espace affine M de dimension finie. Supposons que $N_0 \subset \bar{N} \setminus N$, $\dim N_0 = k$, $\dim N = 1$ et $k < 1$. Alors les ensembles φ et ψ des points de N_0 où N_0, N jouissent de la propriété* (A) *où* (B), *respectivement, sont sous-analytiques dans M et denses dans N_0.*

Démonstration. Comme la condition de la thèse est invariante par rapport aux isomorphismes analytiques, il suffit de considérer le cas où M est vectoriel euclidien et N_0 est un sous-ouvert d'un sous-espace vectoriel τ_0 de dimension k. Notons par τ_z l'espace tangent au z à la variété N. Nous rappellerons ici les définitions des applications qui nous seront utiles (cf. [2], [7]). Pour chaque couple de sous-espaces N', N'' de M tel que $\dim N' \leqslant \dim N''$ on pose $\gamma(N' N'') = \dfrac{\|t' \wedge g''\|}{\|t'\| \|g''\|}$, où t', g'' sont des multivecteurs (non nuls) de N' et du supplémentaire orthogonale de N'', respectivement. Notons

$$\sigma_0(N', N'') = \inf\{\|x-y\|,\ x \in N'_{\bullet} \cap S,\ y \in N'' \cap S\}, \text{ où}$$

$$S = \{x \in M;\ \|x\| = 1\}, \quad \text{et} \quad \sigma(N', N'') = \sup\{\varrho(x, N' \cap S),\ x \in N' \cap S\}.$$

Observons que les applications γ, σ_0, σ sont sous-analytiques et que les ensembles φ et ψ peuvent être décrits de la manière suivante: $\varphi = \{c \in N_0, \lim\limits_{\substack{z \to c \\ z \in N}} \gamma(\tau_0, \tau_z) = 1\}$,

$\psi = \{c \in N_0;\ \lim\limits_{\substack{z \to c,\, x \to c, \\ z \in N,\, x \in N_0 \\ z \neq x}} \gamma(R(z-x), \tau_z) = 1$, d'où il résulte facilement qu'ils sont aussi sous-

-analytiques dans M. Posons

$$\psi_1 = \{c \in N_0;\ \lim_{\substack{z \to c \\ z \neq p(z)}} \sigma\big(R(z-p(z)), \tau_z\big) = 0\}, \text{ où } p\colon M \to \tau_0 \text{ est}$$

la projection orthogonale. L'ensemble ψ_1 est aussi sous-analytique.

On a $\varphi \subset \psi_1 \subset \psi$. Nous répétons ici la démonstration de ce fait après [2]. Soit $c \in \varphi \cap \psi_1$. Si $(x, z) \in N_0 \times N$ tend vers (c, c) alors, si $x = p(z)$, $\sigma\big(R(z-x), \tau_z\big) \to 0$ et si $x \neq p(z)$, on a $\sigma(\tau_0, \tau_z) \to 0$; on a maintenant $\sigma\big(R(z-p(z)), \tau_z\big) \to 0$ mais $\liminf \sigma_0\big(R(x-p(z)), R(z-p(z))\big) > 0$, d'où $\sigma\big(R(x-p(z)) + R(z-p(x)), \tau_z\big) \to 0$ ce qui entraîne $\sigma\big(R(x-z), \tau_z\big) \to$ $\to 0$; ceci montre que $c \in \psi$.

Il suffit de provuver que φ et ψ_1 sont denses dans N_0 ou (vu leur sous-analycité) que $N_0 \setminus \varphi$, $N_0 \setminus \psi_1$ n'ont pas de points intérieurs. A cet effet, observons que tous les deux sont de la forme:

$$\{c \in N_0;\ \liminf_{z \to c} \eta(z) < 1\}, \text{ où } \eta(z) \text{ est égal á } \gamma(\tau_0, \tau_z)$$

$$\text{ou } \gamma\big(R(z-p(z)), \tau_z\big),$$

respectivement. Donc il suffit de montrer (Baire) que l'ensemble

$$\{c \in N_0;\ \liminf_{z \to c} \eta(z) \leqslant 1 - 2\delta\}$$

n'a pas de points intérieurs quel que soit $\delta > 0$.

Supposons le contraire: Il existent alors δ et un voisinage W dans M d'un $c \in N_0$ tels que $\liminf_{z \to x} \eta(z) \leqslant 1 - 2\delta$ pour $x \in W \cap N_0$.

Posons $B = \{z \in W \cap N;\ \eta(z) \leqslant 1 - \delta\}$. Comme B est sous-analytique, il existe ([1]) une stratification $\mathscr{S} = \{\Gamma_\nu\}$ de M en feuilles sous-analytiques, compatible avec B, N et $W \cap N_0$. Prenons $\Gamma_0 \in \mathscr{S}$ tel que $\dim \Gamma_0 = k$ et $\Gamma_0 \subset W \cap N_0$. Observons qu'il existe $\Gamma \in \mathscr{S}$, $\Gamma \subset B$ tel que $\bar{\Gamma} \supset \Gamma_0$. En effet, l'ensemble $B_0 = \bigcup\{\Gamma \in \mathscr{S};\ \bar{\Gamma} \supset \Gamma_0\}$ est ouvert dans M et $B_0 \supset \Gamma_0$; posons $B_1 = \bigcup\{\Gamma \in \mathscr{S};\ \bar{\Gamma} \supset \Gamma_0,\ \Gamma \subset N\}$. S'il était $B_1 \cap B = \emptyset$, on aurait $\eta(z) > 1 - \delta$ dans B_1, d'où $\liminf_{z \to x} \eta(z) \geqslant 1 - \delta$ pour $x \in \Gamma_0$, ce qui contradicte $\Gamma_0 \subset W \cap N_0$.

Pour finir la démonstration il nous faut la proposition suivante:

Proposition. *Soit E une feuille sous-analytique dans M, F un sous-analytique dans M,* $\dim E = 1$, $\dim F = k$ et $F \subset \bar{E} \setminus E$. *Alors il existe Λ une feuille sous-analytique dans M, de* $\dim k+1$, *telle que $\Lambda \subset E$ et* $\dim \bar{\Lambda} \cap F = k$.

Démonstration de la proposition. Observons qu'il suffit de prouver notre proposition dans le cas où $E = \pi(A)$, A est un semi-analytique rel. compact dans $M \times R_p$, $\pi\colon M \times R^p \to M$ la projection naturelle et π_A immersion (lemme B de [4]). Prenons $\pi^{-1}(F) \cap \bar{E}$. C'est un ensemble sous-analytique de dimension $\geqslant k$, contenu dans $\bar{E} \setminus E$. Posons

$$G = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \pi^{-1}(F) \cap \bar{E};\ y \text{ est le premier (dans l'ordre} \\ \text{lexicographique dans } R^p) \text{ élément tel que } (x, y) \in \pi^{-1}(F) \cap \bar{E} \end{array} \right\}$$

G est sous-analytique (cf. [8]) est pour chaque x, $\# G_x = 1$. Par conséquent $\dim G = \dim F = k$ (observons que $\pi(G) = F$). Choisissons maintenant une feuille sous-analytique $T \subset G$ de dimension k telle que $\dim G \setminus T < k$ (cf. [8]). En vertu du théorème de Sard $\dim \pi(\{(x, y) \in T;\ \mathrm{rk}\, d_{(x,y)}\pi < k\}) < k$. Comme $\# G_x = 1$ pour chaque x, nous avons aussi

$\dim\{(x, y) \in T;\ \mathrm{rk}\, d_{(x,y)}\pi < k\} < k$, d'où $\dim \tilde{G} = k$, où

$$\tilde{G} = \{(x, y) \in T;\ \mathrm{rk}\, d_{(x,y)}\pi = k\}.$$

Prenons S une feuille sous-analytique telle que $S \subset \tilde{G}$, $\dim S = k$ et $\dim \tilde{G} \setminus S < k$. Evidemment π_S est une immersion. On peut trouver $\tilde{S}$ une feuille semi-analytique de dimension k contenue dans S. Prenons alors une partition normale N dans un point quelconque $a \in \tilde{S}$, compatible avec $\tilde{S}$ et A. Choisissons $\Gamma_1 \in N$, $\Gamma_1 \subset \tilde{S}$, $\dim \Gamma_1 = k$ et $\Gamma_2 \in N$, $\Gamma_2 \subset A$ tels que $\Gamma_1 \subset \overline{\Gamma}_2 \setminus \Gamma_2$. En appliquant Wings lemma (cf. [7]) au couple Γ_1, Γ_2 nous obtenons une feuille semi-analytique Γ_3 de dimension k, contenue dans A et telle que $\Gamma_1 \subset \overline{\Gamma}_3 \setminus \Gamma_3$. Il est facile á verifier que $\Lambda = \pi(\Gamma_3)$ est la feuille sous-analytique cherchée. Maintenant appliquons la proposition ci-dessus aux ensembles Γ_0, Γ que nous avons choisis dans la stratification $\mathscr{S}$. Rappelons que $\Gamma \subset B$, $\Gamma_0 \subset \overline{\Gamma}$, $\dim \Gamma_0 = k$ et $\Gamma_0 \subset W \cap N_0$. En vertu de la proposition nous obtenons alors une feuille sous-analytique Λ de dimension $k+1$, contenue dans Γ et telle que $\dim \overline{\Lambda} \cap \Gamma_0 = k$. En utilisant les méthodes de [8] nous pouvons trouver un ensemble sous-analytique W tel que $\dim W = k+1$, $\dim W \cap (\overline{\Lambda} \setminus \Lambda) = k$ et $W = \{u + \varphi(u),\ u \in \Omega\}$ où Ω est ouvert dans un sous espace U de dimension k, $\varphi\colon \Omega \to V$ est une fonction analytique et $M = U \oplus V$ la somme orthogonale.

Alors nous pouvons appliquer le lemme 3 et par conséquent il existe un sous-analytique E de $\dim \leqslant k+1$ contenu dans W tel que les ensembles $\overline{W} \setminus W$, W jouissent de la propriété (B) dans chaque point de $(\overline{W} \setminus (W \cup E)) \cap \overline{\Lambda}$. Or, cela contradicte la définition de l'ensemble B (vu que $W \subset B$) et la démonstration du lemme 4 est achevée.

THÉORÈME. *Soit M un espace affine. Soient $E_1, \ldots, E_r$ des ensembles sous-analytiques dans M. Alors il existe une stratification N de M, compatible avec $E_1, \ldots, E_r$ et telle que chaque $\Gamma \in N$ est une feuille sous-analytique et pour chaques $\Gamma_1, \Gamma_2 \in N$ tels que $\Gamma_1 \subset \overline{\Gamma}_2 \setminus \Gamma_2$ les variétés Γ_1, Γ_2 jouissent de la propriété* (B) *de Whitney dans chaque point de Γ_1.*

Démonstration. On va définir (après [2]) des feuilles sous-analytiques $V^n, \ldots, V^0$ par récurrence (descedante) de la manière suivante. Soit $n \geqslant k \geqslant 0$. On pose $Z^k = M \setminus (V^n \cup \ldots \cup V^{k+1})$ (donc $Z^n = M$). D'après [4] il existe une feuille sous-analytique $W^k \subset Z^k$, telle que $\dim(Z^k \setminus W^k) < \dim Z^k$. Pour $E \subset M$ un ensemble sous-analytique on note avec $r_k(E)$ ou $S_k(E)$ l'intérieur dans W^k de $W^k \cap E$ ou de $W^k \setminus E$ respectivement. Etant donnés $V^k, \ldots, V^{k+1}$ on définit V^k par

$$V^k = \bigcap_{j>k} (r_k(\overline{\Gamma}^j_v) \setminus \overline{\Lambda}^j_{k,v}) \cup s_k(\Gamma^j_v) \cap \bigcap_{i=1} (r_k(E_i) \cup s_k(E_i))$$

où Γ^j_v sont les composantes connexes de V^j et Λ^j_{kv} dénote l'ensemble des points de $r_k(\overline{\Gamma}^j_v)$ où $r_k(\overline{\Gamma}^j_v)$, Γ^j_v ne jouissent pas au moins d'une des propriétés (A), (B). $\{\Gamma^j_v\}$ est une stratification avec la propriété (B).

Bibliographie

[1] Z. Denkowska, J. Stasica, *Sur la stratification sous-analytique*, Bull. de l'Acad. Pol. des Sci. Sér. des sci. math. vol. XXX, N° 7-8, 1982.

[2] S. Łojasiewicz, *Stratification des ensembles semi-analytiques avec les propriétés* (A) *et* (B) *de Whitney.*

[3] W. Pawłucki, *Stokes theorem for sub-analytic sets*, to appear.

[4] Z. Denkowska, S. Łojasiewicz, J. Stasica, *Certaines propriétés élémentaires des ensembles sous-analytiques.* Bull. de l'Acad. Pol. des Sci. Sér. des Sci. math. vol. XXVII n° 7-8, 1979, pp. 529-536.

[5] Z. Denkowska, S. Łojasiewicz, J. Stasica, *Sur le théorème du complémentaire pour les ensembles sous-analytiques*, ibidem, p. 537-539.

[7] S. Łojasiewicz, *Les ensembles semi-analytiques*, preprint Bures-sur Yvette 1968.

[8] J. Stasica, *Whitney property of subanalytic sets*, Zesz. Naukowe UJ, Prace Mat. Zeszyt 23, 1982.

[9] Mather, *Notes on topological stability*, Preprint, Harvard Univ., Massachusetts 1970.

Received November 12, 1981