UNIVERSITATIS IAGELLONICAE ACTA MATHEMATICA, FASCICULUS XXVI

1987

Des applications du théorème de Puiseux dans la théorie des ensembles semi-analytiques dans R^2

par Krzysztof KURDYKA

Soit E un ensemble semi-analytique borné dans R, R^n, on va considérer la fonction φ: $\boldsymbol{R} \ni t \to m_n(E_t) \in \boldsymbol{R}$, ou $E_t = \{x \in \boldsymbol{R}^n\colon (t, x) \in E\}$, m_n dénote la mesure de Lebesgue dans $\boldsymbol{R}^n$.

Dans le cas où $n = 1$ on montre que φ est semi-analytique. Un sous-ensemble $E \subset \boldsymbol{R}^n$ est semi-analytique si et seulement si chaque point de $\boldsymbol{R}^n$ possède un voisinage ouvert U tel que:

$$E \cap U = \bigcup_{i=1}^{k} \left(\bigcap_{j=1}^{l} \{g_{ij} > 0\} \cap \{f_i = 0\} \right)$$

avec g_{ij}, f_i analytiques dans U.

La fonction f: $A \to \boldsymbol{R}^n$, $A \subset \boldsymbol{R}^m$, est semi-analytique si et seulement si sa graphe est semi-analitique dans $\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^n$. Toutes, les propriétés des ensembles semi-analytiques que nous allons utiliser peuvent être trouvées dans [1]. Au début on va donner une démonstration du théorème de Puiseux.

THÉORÈME 1. (Puiseux) *Soit $H(z, w)$ un polynôme distingué de degré k, irreducible, aux coefficients holomorphes dans un voisinage de $0 \in \boldsymbol{C}$, alors il existe*

$\delta > 0$, h: $\{|z| < \delta^{1/k}\} \to \boldsymbol{C}$ *une fonction holomorphe,* $h(0) = 0$ *telle que*

$$(*) \qquad H^{-1}(0) \cap \{|z| < \delta\} \times \boldsymbol{C} = \{(z^k, h(z));\ |z| < \delta^{1/k}\}$$

Remarque 1.2 *Observons que chaque ensemble de la forme* $(*)$ *est analytique dans* $\{|z| < \delta\} \times \boldsymbol{C}$.

En effet, posons

$$G(z^k, w) = \prod_{i=0}^{k-1} (w - h(e_i z)) \qquad \text{pour } |z^k| < \delta,\ w \in \boldsymbol{C}$$

où $e_0, \ldots, e_{k-1}$ sont les racines de 1 du degrées k. G est bien définie (ne dépend pas du choix du racine de z^k). G est un polynôme distingué d'une variable w, alors on peut écrire G de la manière suivante: $G(z, w) = w^k + \alpha_1(z) w^{k-1} + \ldots + \alpha_k(z)$. Les coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont des fonctions holomorphes dans $\{0 < |z| < \delta\}$ et continues dans $\{|z| < \delta\}$, donc ces fonctions sont holomorphes dans $\{|z| < \delta\}$ (théorème de Riemann). Alors G est analytique dans $\{|z| < \delta\} \times \boldsymbol{C}$ et

$$G^{-1}(0) = \{(z^k, h(z)), |z| < \delta^{1/k}\}$$

Démonstration du théorème 1. H est irreducible, donc son discriminant $\mathscr{D} \not\equiv 0$, $\mathscr{D}(0) = 0$, alors il existe $\delta > 0$, tel que:

$$0 < |z| < \delta \Rightarrow \mathscr{D}(z) \neq 0$$

Désignons

$$Z = \{0 < |z| < \delta\} \times \boldsymbol{C} \cap H^{-1}(0)$$

$$D = \{0 < |z| < \delta\} \qquad \pi\colon \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C} \ni (z, w) \to z \in \boldsymbol{C}$$

Du théorème de fonction implicite on déduit que Z est localement la graphe d'une fonction holomorphe, donc $\pi|_Z\colon Z \to D$ est un revêtement d'ordre k. En plus Z est connexe parce que H est irreducible (ce fait peut être aussi obtenu en raisonnant comme ci-dessous et appliquant en suite la Remarque 1.2).

Il est évident que l'application

$$\gamma\colon (\boldsymbol{C} \setminus \{0\}) \times \boldsymbol{C} \ni (z, w) \to (z^k, w) \in (\boldsymbol{C} \setminus \{0\}) \times \boldsymbol{C}$$

est un revêtement d'ordre k.

Remarquons que

$$Z' = \gamma^{-1}(Z) = H \circ \gamma^{-1}(0) \cap D' \times \boldsymbol{C}$$

est aussi localement la graphe d'une fonction holomorphe, parce que le discriminant $\mathscr{D}$, du polynôme $H \circ \gamma$ n'est pas 0 pour $z \in D'$, où $D' = \{0 < |z| < \delta^{1/k}\}$. Posons $g = \pi|_{Z'}$ alors $g\colon Z' \to D'$ est un revêtement d'ordre k. Il suffit de montrer le lemme suivant:

LEMME 1.3. *Application $g\colon Z' \to D'$ est un revêtement trivial (cela veut dire que Z possède k composantes connexes).*

En effet soit A une composante de Z', $g\colon A \to D$ est un homéomorphisme, donc A est une graphe d'une fonction holomorphe dans D, disons h. $H \circ \gamma$ est un polynôme distingué et $H\,;\gamma(z, h(z)) = 0$ dans D, alors

$$\lim_{z \to 0} h(z) = 0$$

posons $h(0) = 0$, alors h est continue dans $\{|z| < \delta^{1/k}\}$. Du théorème de Riemann on déduit que h est holomorphe dans $\{|z| < \delta^{1/k}\}$. $\gamma|_{Z'}\colon Z' \to Z$ est un revêtement, Z est connexe, A est une composante de Z, par conséquent $\gamma(A) = Z$, d'où on obtient tout de suite la thèse du théorème 1.

Démonstration du lemme 1.3. On va profiter des suivantes propriétés élémentaires des revêtements finis:

a) si $\alpha\colon N \to B$ est un revêtement fini, B est homéomorphe avec une boule ouverte dans $\boldsymbol{R}^n$, donc α est un revêtement trivial.

b) soit $\alpha\colon N \to M$ un revêtement fini, $M \supset \Omega$ — connexe, $i = 1, 2$ $\beta_i\colon \Omega \to N$ continués, tels que $\alpha \circ \beta_i = \mathrm{id}_\Omega$. Si $\beta_1(x) = \beta_2(x)$ pour un $x \in \Omega$, alors $\beta_1 \equiv \beta_2$ dans Ω.

Prenons $a \in (0, \delta)$. Observont que $P = f^{-1}\{|z| = a\}$, $(f = \pi|_Z)$ est connexe parce qu'il existe une surjection de Z sur P (elle peut être une rétraction). Soit $\gamma^{-1}(P) = R$, dans ce cas $g|_R = \pi|_R$: $R \to \{|z| = a^{1/k}\}$ est un revêtement, car $R = g^{-1}\{|z| = a^{1/k}\}$. Pour simplifier la notation, admettons que $a = 1$, et soit $S = \{|z| = 1\}$. Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\gamma|_R} & P \\ {\scriptstyle g'=g|_R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'=f|_P} \\ S & \xrightarrow{z^k} & S \end{array}$$

ou z^k: $S \ni z \to z^k \in S$.

Toutes les application dans ce diagramme sont les revêtements d'ordre k, P et S sont connexes

Marquons par $1 = e_0, \ldots, e_{k-1}$ les racines de 1 de degré k indiqués par un argument croissant. Avec une orientation fixée (canonique) sur S "le segment" (e_i, e_j) ou $[e_i, e_j]$ est bien déterminé.

Soit Q une composante de R. Prenons $x \in (e_{k-1}, e_0)$ (nous admettons que $k > 1$, pour $k = 1$ le théorème est trivial). $S \setminus \{x\}$ est homméomorphe avec le segment $(-1, 1) \subset \mathbf{R}$. Alors il existe grâce à (a)

$$\bar{\alpha}_1 : S \setminus \{x\} \to Q$$

un homéomorphisme local tel que $g \circ \bar{\alpha}_1 = \mathrm{id}_{S \setminus \{x\}}$, $\bar{\alpha}_1(z) = (z, \alpha_1(z))$.

Remarquons que $\alpha_1(e_0), \ldots, \alpha_1(e_{k-1})$ sont différents. En effet, si $\alpha_1(e_i) = \alpha_1(e_j)$ pour certains i, j, $i < j \leqslant k-1$, nous allons montrer que $\gamma \circ \bar{\alpha}_1[e_i, e_j]$ est ouvert et fermé dans P, par suite

$$P = \gamma \circ \bar{\alpha}_1[e_i, e_j]$$

mais dans ce cas-là $f'^{-1}(1)$ aurait moins que k points différents.

Posons τ: $S \ni z \to e_{j-i} z \in S$, on a $\tau(e_i) = e_j$ et

$$\gamma \circ \bar{\alpha}_1(e_i) = \gamma \circ \bar{\alpha}_1(e_j)$$

Prenons U-voisinage ouvert connexe de e_i tel que $U \subset S \setminus \{x\}$ et $\tau(U) \subset S \setminus \{x\}$. Grâce à (b) on obtient γ ; $\bar{\alpha}_1 = \gamma \circ \bar{\alpha}_1 \circ \tau$ dans U, d'où

$$\gamma \circ \bar{\alpha}_1(U) = \gamma \circ \bar{\alpha}_1(U \cap [e_i, e_j]) \cup \gamma \circ \bar{\alpha}_1(\tau(U) \cap [e_i, e_j])$$

donc

$$\gamma \circ \bar{\alpha}_1(U) \subset \gamma \circ \bar{\alpha}_1[e_i, e_j]$$

et par conséquent $\gamma \circ \bar{\alpha}_1[e_i, e_j]$ est ouvert car $\bar{\alpha}_1$ est un homeomorphisme local dans (e_i, e_j), mais il est aussi fermé parce que $[e_i, e_j]$ est compacte.

Soit $y \in (e_0, e_1)$, il existe $\bar{\alpha}_2$: $S \setminus \{y\} \to Q$ un homéomorphisme local tel que $g' \circ \bar{\alpha}_2 = \mathrm{id}_{S \setminus \{y\}}$, par analogie on obtient que $\alpha_2(e_0), \ldots, \alpha_2(e_{k-1})$ sont différents. On peut choisir $\bar{\alpha}_2$ de manière que

$$\bar{\alpha}_1(1) = \bar{\alpha}_2(1)$$

De l'autre côté $\bar{\alpha}_1(e_v) = \bar{\alpha}_2(e_v)$ pour $v = 1, \ldots, k-1$, alors nous avons $\bar{\alpha}_1(e_0) = \bar{\alpha}_2(e_0)$, car $\alpha_2(e_v)$, $v = 0, \ldots, k-1$ peut prendre k valeurs différentes tout en plus, donc

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \quad \text{dans } S \setminus \{x, y\}$$

Alors on peut extenser $\bar{\alpha}_1$ a α: $S \to Q$ continue, tel que $g' \circ \alpha = \mathrm{id}_S$, par conséquent $\alpha(S) = Q$ et g': $Q \to S$ est un homéomorphisme.

Il existe une rétraction de Z sur R analogiquement que pour P et R possède k composantes connexes, donc Z possède aussi k composantes connexes. Dans cette partie on va utiliser la conclusion suivante du théorème 1.

COROLLAIRE 1.4 *Soit $F \not\equiv 0$ une fonction analytique dans un voisinage de $0 \in \mathbf{R}^2$, f: $[0, a) \to \mathbf{R}$ une fonction continue, $f(0) = 0$ telle que $F(x, f(x)) = 0$ pour $x \in [0, a)$, alors il existe η une fonction analytique dans un voisinage de $0 \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}$ tels que*

$$f(x) = \eta(x^{1/k}) \quad \textit{pour } x \in [0, b) \textit{ et suffisamment petit}$$

Démonstration. Du théorème de préparation on obtient

$$F(x, y) = w(x, y) x^q H(x, y) \quad \text{dans un voisinage de } 0 \in R^2$$

$w(0, 0) \neq 0$, $H(x, y)$ est un polynôme distingué aux coefficients analytique. Extensons H au polynôme distingué aux coefficients holomorphes dans un voisinage de $0 \in \mathbf{C}$.

$$H = H_1 \ldots H_n \quad \text{ou } H_i \text{ sont irreducibles}.$$

Observons, que pour U un voisinage suffisament petit de $0 \in \mathbf{C}^2$ et pour $H_i \neq H_j$ on a $(U \setminus \{0\}) \cap H_i^{-1}(0) \cap H_j^{-1}(0) = \emptyset$ et par conséquent il existe i_0, tel que $H_{i_0}(x, f(x)) = 0$ pour x petit. On va appliquer le théorème 1 au polynôme H_{i_0} et on va obtenir h une fonction holomorphe dans un voisinage de 0 C, telle que si $x > 0$ est suffisamment petit et $H(x, y) = 0$, alors

$$y = h(e_i x^{1/k})$$

où e_i est un racine de 1 de degré $k = \deg H_{i_0}$. Pour $z \neq 0$ suffisamments petits les fonctions $h(e_v z)$, $v = 0, \ldots, k-1$ sont disjointes, alors il existe v_0 tel que

$$f(x) = h(e_{v_0} x^{1/k}) \quad \text{pour } x \in [0, b), \text{ un } b > 0$$

il suffit de prendre $\eta(x) = h(e_{v_0} x)$.

PROPOSITION 1.5. *Une fonction f: $[a, b] \to R$ bornée est semi-analytique si et seulement si (+) Pour chaque x_0 a, b il existe $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbf{N}$, η_1, η_2: $(-\varepsilon^{1/k}, \varepsilon^{1/k}) \to \mathbf{R}$ les fonctions analytiques telles que*

$$x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow f(x) = \eta_1((x - x_0)^{1/k})$$

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \Rightarrow f(x) = \eta_2((x_0 - x)^{1/k})$$

Démonstration. Prenons $x_0 \in [a, b]$ et $V = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $V \times \mathbf{R} \cap f$ est relativement compacte et semi-analytique, alors il est une réunion finie des morceaux semi-analytiques (un morceau semi-analytique c est une sous-variété analytique qui est un ensemble semi-analytique) de dimension 0 ou 1. En diminuant suffisamment δ on peut admettre que $V\times \boldsymbol{R}\cap f$ se compose de deux morceaux connexes tout au plus de dimension 1 et le point $(x_0, f(x_0))\cdot f|_{(x_0,x_0+\delta)}$ est continue, car $(x_0, x_0+\delta)\times \boldsymbol{R}\cap f$ est une sous-variété de $\boldsymbol{R}^2$. $A = f|_{(x_0,x_0+\delta)}$ est semi-analytique et $\dim A = 1$, donc $\dim(\bar{A}\setminus A) = 0$, $\bar{A}\setminus A$ est fini d'où on déduit qu'il existe

$$\lim_{t\to x_0+} f(t) = g_1$$

Pour simplifier la notation admettons que $x_0 = g_1 = 0$. D'après la dèfinition d'un ensemble semi-analytique, pour un voisinage U de $0\in \boldsymbol{R}^2$ il existent f_i, g_{ij} analytiques dans U telles que

$$f\cap U = \varDelta \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} \{g_{ij}>0\}\cap\{f_i = 0\}$$

Observont que toutes les $f_i \neq 0$, parce que dans le cas contraire nous aurions $\operatorname{Int} f\cap$ $\cap\, U \neq \emptyset$, ce que n'est pas possible. Posons $F = f_1\ldots f_n \not\equiv 0$ on a $U\cap f\subset F^{-1}(0)$. Prenons δ si petit que $(x, \bar{f}(x))\in U$ pour $x\in[0,\delta)$ ($\bar{f}(x) = \bar{f}(x)$ pour $x\neq 0$ et $\bar{f}(0) = 0$). Appliquons le corollaire 1.4 à la fonction continue f et $F\neq 0$ analytique dans U. On obtient $\bar{\eta}_1$ analytique dans un voisinage de $0\in \boldsymbol{R}$, $k_1\in \boldsymbol{N}$ telle que

$$\bar{f}(x) = \bar{\eta}_1(x^{1/k_1}) \quad \text{pour } x>0 \text{ suffisamment petit}$$

On obtient par analogie $f(x) = \bar{\eta}_2((x_0-x)^{1/k_2})$ pour $x\in(x_0-\varepsilon, x_0)$, où $\bar{\eta}_2$ est analytique dans $(-\varepsilon^{1/k_2}, \varepsilon^{1/k_2})$. Posons

$$\bar{\eta}_1(t^{k_2}) = \eta_1(t),\ \eta_2(t^{k_1}) = \eta_1(t) \quad \text{et} \quad k = k_1k_2$$

Prenons ε suffisamment petit. Nous obtenons donc

$$f(x) = \eta_1((x-x_0)^{1/k}) \quad \text{pour } x\in(x_0, x_0+\varepsilon)$$

$$f(x) = \eta_2((x_0-x)^{1/k}) \quad \text{pour } x\in(x_0-\varepsilon, x_0)$$

Supposons que la condition (+) est vérifiée. Soit $x_0\in[a,b]$ et $f(x) = \eta_1((x-x_0)^{1/k})$ pour $x\in(x_0, x_0+\varepsilon)$, òu $k\in \boldsymbol{N}$ et η_1 est analytique dans $(-\varepsilon^{1/k}, \varepsilon^{1/k})$. Nous allons montrer que pour un $\tau>0$ $f|_{(x_0,x_0+\gamma)}$ est semi-analytique. Pour simplifier admettons que $x_0 = \eta_1(0) = 0$.

Extensons η_1 a h — une fonction holomorphe dans un voisinage de $0\in \boldsymbol{C}$. Posons

$$G(z^k, w) = \prod_{v=0}^{k-1}(w-h(e_v z))$$

où $e_0, \ldots, e_{k-1}$ sont les racines de 1 de degré k. De la remarque 1.2 on déduit que G est bien définie et holomorphe dans un voisinage de $0\in \boldsymbol{C}^2$. Observons que G est réelle car $\overline{G(z,w)} = G(\bar{z}, \bar{w})$.

Pour $z \neq 0$ suffisamment petits les fonctions $h(e_v z)$ sont disjointes ou bien égales. De ce fait on déduit que pour τ suffisamment petit l'ensemble $E = \{(x, \eta_1(x^{1/k})), x \in (0, \tau)\}$ est une composante connexe de $G^{-1}(0) \cap (0, \tau) \times (\boldsymbol{R} \setminus \{0\})$ — semi-analytique. Par conséquent [1] E est semi-analytique.

On a montré que pour chaque $x_0 \in [a, b]$ il existe V — un voisinage de x_0 tel que $f \cap V \times \boldsymbol{R}$ est semi-analytique, d'où f est semi-analytique dans $\boldsymbol{R}^2$.

Remarque 1.6. De la proposition 1.5 on obtient un exemple d'une fonction f analytique dans $(0, 1)$ et continue dans $[0, 1]$ qui n'est pas semi-analytique. En effet prenons $\alpha > 0$ irrationel et posons

$$f(x) = x^{\alpha} \quad \text{pour } x \in (0, 1] \text{ et } f(0) = 0$$

Si f serait semi-analytique, d'après la proposition 1.5 on aurait $k \in \boldsymbol{N}$, η analytique dans un voisinage de $0 \in \boldsymbol{R}$, tel que $f(x) = x^{\alpha} = \eta(x)$ pour $x \in (0, \varepsilon)$ et un $\varepsilon > 0$, d'où

(i) $$x^{k\alpha} = \eta(x) \quad \text{pour } x \in (0, \varepsilon^{1/k})$$

$k\alpha \notin \boldsymbol{N}$ pour chaque $k \in \boldsymbol{N}$. Il existe $r \in \boldsymbol{N}$ tel que $0 < r - k\alpha < 1$, alors on ne peut pas extenser le côté gauche de l'égalité (i) à la fonction de la classe C^r dans un voisinage de $0 \in \boldsymbol{R}$, mais le côté droit de l'égalité (i) possède une extension analytique dans un voisinage de $0 \in \boldsymbol{R}$.

Lemme 1.7 *Soit f, g: $[a, b] \to \boldsymbol{R}$ bornées et semi-analytiques, alors $f + g$ est aussi semi-analytique.*

Démonstration. En effet il suffit d'appliquer la proposition 1.5 avec la même "k" dans la condition $(+)$ pour f et g.

Théorème 2. *Soit E sami-analytique et borné dans R^2, alors la fonction*

$$\varphi\colon \boldsymbol{R} \ni t \to m_1(E_t) \in \boldsymbol{R}$$

est semi-analytique.

Démonstration. D'abord on va montrer le lemme qui joue le rôle essentiel dans ce preuve.

Lemme 2.1. *Soit A semi-analytique, relativement compacte dans $\boldsymbol{R}^2$,* $\dim A = 1$, *donc il existe*

$$t_1^1\, t_1^2, \ldots, t_n^1, t_n^2 \in \boldsymbol{R} \textit{ tel que: } i < j \Rightarrow t_i^2 \leqslant t_j^1,\ t_i^1 < t_i^2 \textit{ pour chaque } i = 1, \ldots, n$$

les fonctions h_{ir}: $(t_i^1, t_i^2) \to R$, $r = 1, \ldots, s_i$, continuese t semi-analytiques telles que

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{r=1}^{s_i} h_{ir} \cup \bigcup_{\substack{i=1 \\ \varepsilon = 1,2}}^{n} (\{t_i^{\varepsilon}\} \times \boldsymbol{R}) \cap A$$

Preuve du lemme 2.1. Observont qu'on peut admettre que A est fermé, car $\bar{A}/A$ est fini.

Soit $t_0 \in \pi(A)$ et $(t_0, x_0) \in A$, ou $\pi(t, x) = t$. Prenons une partition normale $\mathcal{N}$ d'un voisinage normal Q du point (t_0, x_0) compatible avec A et $\{(t_0, x_0)\}$. On a

$$A \cap Q = \bigcup \Gamma_v \quad \Gamma_v \in \mathcal{N} \text{ (réunion finie)}$$

Chaque Γ_v est un morceau semi-analytique de dimension 1 ou bien est égal $\{(t_0, x_0)\}$. Certains Γ_v sont contenus dans $\{t_0\} \times \boldsymbol{R}$, on va s'occuper du reste. On va montrer que si on prend Q suffisamment petit, $Q \cap \Gamma_v$ sont les graphes des fonctions continues dans un segment de la forme $(t_0, t_0+\varepsilon)$ où bien $(t_0-\varepsilon, t_0)$.

Soit $\Gamma_v \not\subset \{t_0\} \times \boldsymbol{R}$, un vecteur du complément orthogonal de l'espace $T_{(t,x)}\Gamma_v$ est de la forme $g(t, x) = \operatorname{grad} H_2^1(t, x)$, où H_2^1 est un des polynômes du système normal qui donne la partition $\mathcal{N}$, d'où

$$B = \{w \in \Gamma_v\colon\ T_w\Gamma_v = \{0\} \times \boldsymbol{R} = \{w \in \Gamma_v\colon\ g(w)\cdot(1, 0) = 0\}$$

est semi-analytique et $\dim B = 0$ (car Γ_v est une sous-variété analytique) donc B est fini.

Prenons les composantes connexes de $\Gamma_v \setminus B$ qui possèdent dans leur closure le point (t_0, x_0). Si on prend Q suffisamment petit le nombre des membres de la partition normale $\mathcal{N}$ est constant pour chaque $Q' \subset Q$ voisinage normal de (t_0, x_0), alors on peut admettre qu il n'existe qu'une telle composante.

Prenons Q un voisinage normal tel que $\Gamma_v' = Q \cap \Gamma_v$ est connexe et $\Gamma_v' \cap B = \emptyset$, dans ce cas-la

$$\pi|_{\Gamma_v'}\colon\ \Gamma_v' \to \boldsymbol{R}$$

est un difféomorphisme, donc Γ_v' est une graphe d'une fonction continue dans le segment $\pi(\Gamma_v')$. Comme $t_0 \in \overline{\pi(\Gamma_v')}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\pi(\Gamma_v') = (t_0, t_0+\varepsilon)$ ou bien $\pi(\Gamma_v') = (t_0-\varepsilon, t_0)$.

$Q \cap A = \bigcup \Gamma_v$ est une réunion finie, appliquons le raisemment ci-dessus pour chaque $\Gamma_v \subset A$. En prenant Q suffisamment petit on a: $Q \cap \Gamma_v$ est soit un segment vertical, soit la graphe d'une fonction continue dans $(t_0, t_0+\varepsilon)$ ou bien dans $(t_0-\varepsilon, t_0)$.

L'ensemble $A \cap \pi^{-1}(t_0)$ est compacte, donc on peut trouver le nombre fini des points $x_1, \ldots, x_k$, et respectivement leurs voisinages $Q_1, \ldots, Q_k$ tels que $A \cap Q_i$ est une réunion finie des graphes des fonctions continues, des segments verticaux et des points (t_0, x_i). Comme $A \cap \pi^{-1}(t_0) \subset \bigcup_{i=1}^{k} Q_i$ et A est compacte on peut donc choisir $\varepsilon > 0$ de manière que

$$A \cap \pi^{-1}(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \subset \bigcup_{1}^{k} Q_i$$

Par conséquent les ensembles $A \cap \pi^{-1}(t_0-\varepsilon, t_0)$ et $A \cap \pi^{-1}(t_0, t_0+\varepsilon)$ s'ils ne sont pas vides, sont une réunion finie des graphes des fonctions continues (en diminuant ε on peut admettre que toutes ces fonctions sont définies sur $(t_0-\varepsilon, t_0)$ ou respectivement sur $(t_0, t_0+\varepsilon)$.

Pour finir la preuve du lemme 2.1 il suffit de remarquer que, lorsque A est compacte, il existe $t_1, \ldots, t_m \in \boldsymbol{R}$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \boldsymbol{R}_+$ tels que

$$\pi(A) \subset \bigcup_{j=1}^{m} (t_j-\varepsilon_j, t_j+\varepsilon_j)$$

et $A \cap \pi^{-1}(t_j - \varepsilon_j, t_j)$ est réunion des graphes des fonctions continues, il en est de même pour $\pi^{-1}(t_j, t_j + \varepsilon_j) \cap A$.

En arrangeant les points $t_j - \varepsilon_j, t_j, t_j + \varepsilon_j$ dans la suite croissante nous obtenons les points cherchés

$$t_1^1, t_1^2, \ldots, t_n^1, t_n^2 \in \boldsymbol{R}$$

tels que

$$\pi^{-1}(t_i^1, t_i^2) \cap A = \bigcup_{r=1}^{S_i} h_{ir}$$

ou h_{ir} sont les fonctions dont les graphes donnent $\pi^{-1}(t_i^1, t_i^2) \cap A$.

Observons en plus, que toutes ces fonctions sont disjointes, d'où on déduit que h_i^r sont semi-analytiques, car leur graphes sont des composantes connexes de l'ensemble semi-analytique $\pi^{-1}(t_i^1, t_i^2) \cap A$. Du lemme 2.1 on obtient facilement.

LEMME 2.2 *Soit $E \subset \boldsymbol{R}$ un ensemble semi-analytique ouvert, borné, alors il existe*

$$t_1^1, t_1^2, \ldots, t_n^1, t_n^2 \in \boldsymbol{R},\ t_i^1 < t_i^2,\ i<j \Rightarrow t_i^2 \leqslant t_i^1$$

les fonctions $\underline{h}_{ir}, \bar{h}_{ir}$ semi-analytiques et continues dans (t_i^1, t_i^2) $\underline{h}_{ir} < \bar{h}_{ir}$, $k<l \Rightarrow \bar{h}_{kr} \leqslant \underline{h}_{lr}$, tels que

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{r=1}^{S_i} \{(t,x),\ t \in (t_i^1, t_i^2),\ \underline{h}_{ir}(t) < x < \bar{h}_{ir}(t)\} \cup \bigcup_{\substack{i=1\\ \varepsilon=1,2}}^{n} \{t_i^\varepsilon\} \times \boldsymbol{R} \cap E.$$

En effet il suffit d'appliquer le lemme 2.1 à l'ensemble $\bar{E} \setminus E$ qui est semi-analytique compacte et $\dim \bar{E} \setminus E = 1$.

Maintenant on va prouver le théorème 2. Soit φ_F une application $\boldsymbol{R} \ni t \to m_1(F_t) \in \boldsymbol{R}$ pour $R^2 \supset F$ fixé ($F_t = \{x \in \boldsymbol{R},\ (t,x) \in F\}$).

Soit $E \subset \boldsymbol{R}^2$ semi-analytique borné. On a

$$E = \operatorname{Int} E \cup (E \setminus \operatorname{Int} E)$$

$E \setminus \operatorname{Int} E$ vérifie les conditions du lemme 2.1, d'où on obtient que $\varphi_{(E \setminus \operatorname{Int} E)}$ est égale à 0 sauf le nombre fini des points, donc elle est semi-analytique.

Du lemme 2.2 on déduit que

$$\text{(o)} \qquad \varphi_{\operatorname{Int} E} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{S_i} (\bar{h}_{ir} - \underline{h}_{ir}) \chi(t_i^1, t_i^2) + \sum_{\substack{i=1\\ \varepsilon=1,2}}^{n} \delta_{t_i}^{\varepsilon} m_1(\pi^{-1}(t_i^\varepsilon) \cap \operatorname{Int} E)$$

ou

$$\chi_{(t_i^1, t_i^2)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in (t_i^1, t_i^2) \\ 0 & \text{pour } t \notin (t_i^1, t_i^2) \end{cases}$$

$$\delta_{t_i^1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t = t_i^1 \\ 0 & \text{pour } t \neq t_i^1 \end{cases}$$

$$\delta_{t_i^2}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t = t_i^2 \text{ et } t_i^2 \neq t_{i+1}^1 \\ 0 & \text{pour } t \neq t_i^2 \text{ ou bien } t_i^2 = t_{i+1}^1 . \end{cases}$$

Observons que toutes les composantes du côté droit de l'égalité (o) sont des fonctions semi-analytiques bornées définies dans un segment fermé, donc grâce au lemme 1.7 φ_{Int} est semi-analytique, d'où $\varphi_E = \varphi_{\mathrm{Int}\,E} + \varphi_{E \setminus \mathrm{Int}\,E}$ est semi-analytique.

Bibliographie

[1] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, I. H. E. S. Bures-sur-Yvette, 1965.

Received July 20, 1981.