ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
Nr 18 MATEMATYKA — FIZYKA — CHEMIA Z. 4 1958

Zdzisław Opial

O ruchach izo- i tautochronicznych

Rozważać będziemy równanie różniczkowe

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(x) \tag{1}$$

gdzie $g(x)$ oznacza funkcję określoną i ciągłą dla dowolnego x, dodatnią dla x ujemnych i ujemną dla x dodatnich. Równanie to można traktować jako równanie ruchu punktu materialnego o masie jednostkowej poruszającego się po osi x-ów pod wpływem siły zależnej jedynie od położenia punktu i skierowanej stale w kierunku początku układu. Tego rodzaju ruchem jest na przykład dobrze znany ruch harmoniczny opisywany równaniem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -h^2x \quad (h \text{ — stała różna od zera}) \tag{2}$$

Wiadomo, że przy odpowiednich założeniach o funkcji $g(x)$ ruch opisywany równaniem (1) będzie okresowy. Punkt materialny puszczony swobodnie w jakimś punkcie osi x-ów zacznie poruszać się w kierunku początku układu; po pewnym czasie T_1 przejdzie przez niego z pewną prędkością v_0, która od tej chwili pod wpływem przyśpieszenia niezgodnego z kierunkiem ruchu zacznie maleć. Przy odpowiednio silnym przyspieszeniu przeciwstawiającym się ruchowi punkt po pewnym czasie T_2 zatrzyma się i natychmiast zacznie się poruszać w kierunku początku układu, docierając do niego z powrotem po czasie T_2 z prędkością $-v_0$. Po upływie dalszych T_1 sekund poruszający się punkt materialny znajdzie się ponownie w punkcie wyjściowym. Tak więc po upływie $2(T_1+T_2)$ sekund powtórzy się sytuacja wyjściowa i punkt znowu zacznie przebiegać opisaną już drogę.

Czy z tego, że w ruchach opisywanych równaniami (1) i

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \quad \big(f(x) \text{ posiada te same własności, co } g(x)\big) \tag{1'}$$

punkt materialny puszczony swobodnie w dowolnym punkcie ξ dociera do początku układu po czasie $T(\xi)$, jednakowym dla obu ruchów, wynika, że odpowiednie pola sił są identyczne, to znaczy $f(x) \equiv g(x)$?

W szczególności, czy jedynymi ruchami punktu materialnego opisywanymi równaniami typu (1), dla których okres wahań nie zależy od amplitudy, są ruchy opisywane równaniami typu (2)?

Pozytywną odpowiedź na drugie z tych zagadnień znaleźć można na przykład u P. Appella w „Traité de mécanique rationnelle" (t. I, rozdz. X). Dowód odpowiedniego twierdzenia jest tam jednak prowadzony środkami wymagającymi dodatkowych założeń o regularności funkcji $g(x)$ (istnienie ciągłej pochodnej rzędu pierwszego).

W podanym poniżej dowodzie twierdzenia I zakładać będziemy jedynie ciągłość funkcji $g(x)$ i $f(x)$.

Twierdzenie I. *Jeżeli punkt materialny puszczony swobodnie w dowolnym punkcie ξ dociera do początku układu po czasie $T(\xi)$ niezależnie od tego czy porusza się według prawa (1) czy (1'), to $f(x) \equiv g(x)$.*

Wobec tego, że przy ruchu według prawa (2) punkt materialny dociera do początku układu po czasie niezależnym od położenia punktu początkowego i, na odwrót, dla dowolnego $T > 0$ zawsze można znaleźć taką stałą h, aby $T(\xi) \equiv T$, z twierdzenia poprzedniego otrzymujemy natychmiast jako wniosek.

Twierdzenie II. *Jeżeli punkt materialny puszczony swobodnie w dowolnym punkcie osi x-ów poruszając się według prawa (1) dociera do punktu $x = 0$ po czasie niezależnym od położenia początkowego, to $g(x) \equiv -h^2x$, gdzie h jest odpowiednio dobraną stałą.*

Dowód twierdzenia I przeprowadzimy przy założeniu, że $\xi > 0$. Dowód w przypadku $\xi < 0$ byłby zupełnie analogiczny.

Wiadomo, że czas $T(\xi)$, po upływie którego punkt materialny o masie jednostkowej, puszczony swobodnie w punkcie ξ poruszając się podług prawa (1) dociera do początku układu, wyraża się następującym wzorem

$$T(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{G(\xi) - G(x)}} \quad \text{gdzie} \quad G(x) = -2\int_0^x g(u)\,du \tag{3}$$

Załóżmy, że przy ruchu według prawa (1') czas ten jest taki sam, to znaczy

$$T(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{F(\xi) - F(x)}} \quad \text{gdzie} \quad F(x) = -2\int_0^x f(u)\,du. \tag{3'}$$

Udowodnimy, że $F(x) \equiv G(x)$, skąd otrzymamy natychmiast, wobec ciągłości funkcji $f(x)$ i $g(x)$: $f(x) \equiv g(x)$. Dla dowodu niewprost załóżmy, że dla pewnego $x_0 > 0$: $G(x_0) - F(x_0) \neq 0$. Zauważmy, że funkcja $G(x) -$

$-F(x)$ ciągła dla wszelkich x przyjmuje w początku układu wartość 0. Istnieje zatem najmniejszy dodatni pierwiastek równania

$$G(x)-F(x) = G(x_0)-F(x_0)$$

Oznaczmy go przez ξ. Ze wzorów (3) i (3') otrzymamy wtedy

$$\int_0^\xi \left[\frac{1}{\sqrt{G(\xi)-G(x)}} - \frac{1}{\sqrt{F(\xi)-F(x)}}\right] dx = 0$$

czyli

$$\int_0^\xi \frac{\sqrt{F(\xi)-F(x)} - \sqrt{G(\xi)-G(x)}}{\sqrt{G(\xi)-G(x)}\sqrt{F(\xi)-F(x)}}\, dx = 0\,.$$

Z tego ostatniego wzoru wynika, że funkcja $\sqrt{F(\xi)-F(x)} - \sqrt{G(\xi)-G(x)}$ nie może mieć w przedziale $(0, \xi)$ stale tego samego znaku. Musi zatem dla $0 < x < \xi$ istnieć choć jeden punkt ξ_1 taki, że

$$\sqrt{F(\xi)-F(\xi_1)} - \sqrt{G(\xi)-G(\xi_1)} = 0$$

to znaczy

$$G(\xi_1)-F(\xi_1) = G(\xi)-F(\xi) = G(x_0)-F(x_0),$$

co z uwagi na nierówność $0 < \xi_1 < \xi$ prowadzi do sprzeczności z określeniem punktu ξ.

Katedra Analizy Matematycznej UJ
Otrzymano 30. XII. 1955 r.

SUMMARY

On iso- and tautochronous motions

Let us denote by $T(\xi)$ and $T_1(\xi)$ these intervals of time, in which the material point of mass 1, the motion of which is described by the equation (1) or (1') respectively ($f(x)$ and $g(x)$ — continuous and $xf(x) \leqslant 0$, $xg(x) \leqslant 0$), starting from the point ξ with zero initial velocity, reaches the origin of coordinates. The author gives an elementary and simple proof of the fact that from the identity $T(\xi) \equiv T_1(\xi)$ follows $g(x) \equiv f(x)$.