

Zdzisław Opiał

O pewnej własności funkcji monotonicznych niesumowalnych

Niech $f(x)$ będzie dowolną funkcją określoną, ciągłą i malejącą (w sensie szerszym) w przedziale $(0, 1]$, dla której

$$\int_0^1 f(x) dx = +\infty \quad (f(x) \geq 0) \quad (1)$$

Niech E będzie dowolnym zbiorem mierzalnym w rozpatrywanym przedziale $(0, 1]$. Oznaczmy przez $m(E, \delta)$ miarę wspólnej części przedziału $(0, \delta)$ i zbioru E . Powstaje pytanie, czy dla każdego zbioru mierzalnego E warunek

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(E, \delta)}{\delta} > 0 \quad (2)$$

względnie warunek

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(E, \delta)}{\delta} > 0 \quad (3)$$

pociąga za sobą niesumowalność funkcji $f(x)$ także na zbiorze E , to znaczy związek

$$\int_E f(x) dx = +\infty \quad (4)$$

Udowodniane poniżej twierdzenie i podany na końcu prosty przykład stanowią właśnie odpowiedź na ten problem postawiony przez p. prof. S. Gołąba.

Twierdzenie: *Jeżeli funkcja $f(x)$ ciągła i malejąca w przedziale $(0, 1]$ spełnia warunek (1), to dla każdego zbioru E mierzalnego w tym przedziale, dla którego zachodzi nierówność (2) prawdziwy jest związek (4).*

Dowód: Wobec nierówności (2) istnieje taka liczba naturalna $p \geq 2$; że dla każdego $\delta \leq 1$:

$$m(E, \delta) \geq \frac{2}{p} \delta. \quad (5)$$

¹⁾ Granice te noszą odpowiednio nazwy zewnętrznej dolnej i zewnętrznej górnej gęstości zbioru E w punkcie 0.

Położmy $\delta_n = \left(\frac{1}{p}\right)^n$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) a przez E_n oznaczmy wspólną część zbioru E i przedziału $[\delta_{n+1}, \delta_n]$. Z uwagi na nierówność (5) mamy dla każdego δ_n :

$$m(E, \delta_n) \geq \frac{2}{p} \delta_n$$

skąd, dla każdego E_n :

$$m(E_n) = m(E, \delta_n) - m(E, \delta_{n+1}) \geq m(E, \delta_n) - \delta_{n+1} \geq \frac{2}{p} \delta_n - \frac{1}{p} \delta_n$$

czyli $m(E_n) \geq \frac{1}{p} \delta_n$. Przyjmijmy $\gamma_n = \delta_n - \frac{1}{p} \delta_n \cdot f(x)$ jest funkcją nierosnącą, przedział $[\gamma_n, \delta_n]$ jest prawą częścią przedziału $[0, \delta_n]$, a miara zbioru E_n jest większa lub równa długości przedziału $[\gamma_n, \delta_n]$, przeto dla każdego n :

$$\int_{E_n} f(x) dx \geq \int_{\gamma_n}^{\delta_n} f(x) dx \quad (6)$$

Z drugiej strony jest $\gamma_n < \delta_n < \delta_{n-1}$ oraz $\frac{\delta_n - \gamma_n}{\delta_{n-1} - \delta_n} = \frac{1}{p(p-1)}$, a więc na mocy monotoniczności funkcji $f(x)$ mamy dla $n \geq 1$:

$$\int_{\gamma_n}^{\delta_n} f(x) dx \geq \frac{1}{p(p-1)} \int_{\delta_n}^{\delta_{n-1}} f(x) dx. \quad (7)$$

Z nierówności (6) i (7) otrzymujemy zatem

$$\int_E f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} f(x) dx \geq \frac{1}{p(p-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\delta_n}^{\delta_{n-1}} f(x) dx = \frac{1}{p(p-1)} \int_0^1 f(x) dx = +\infty$$

co należało udowodnić.

Wykazaliśmy więc, że z nierówności (2) wynika związek (4). Łatwo natomiast pokazać, że analogiczne twierdzenie dla warunku (3) byłoby nieprawdziwe.

Rzeczywiście, weźmy dowolny ciąg liczb dodatnich $a_0 = 1, a_1, a_2, \dots$ zbieżny do zera, i spełniający warunek

$$3a_{n+1} < a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

i taki, aby szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n-1} - 2a_n}$$

był zbieżny (wystarczy na przykład przyjąć $a_{n-1} = (n!)^{-2}$). Funkcję $f(x)$ określimy w następujący sposób:

$$1^\circ f(x) = \frac{1}{a_{n-1} - 2a_n} \text{ w każdym z przedziałów } [2a_n, a_{n-1}];$$

$$2^\circ f(x) \text{ ciągła i liniowa w każdym z przedziałów } [a_n, 2a_n].$$

Z nierówności (8) wynika, że dla każdego n : $a_n - 2a_{n+1} < a_{n-1} - 2a_n$. $f(x)$ jest zatem funkcją nierosnącą. Łatwo też sprawdzić, że będzie to funkcja niesumowalna w przedziale $(0, 1]$. Rzeczywiście

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2a_n}^{a_{n-1}} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2a_n}^{a_{n-1}} \frac{1}{a_{n-1} - 2a_n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

Niech teraz zbiorem E będzie suma wszystkich przedziałów $[2a_n, 3a_n]$ to jest $E = \sum_{n=1}^{\infty} [2a_n, 3a_n]$. Dla tak określonego zbioru E zachodzi nierówność (3), mamy bowiem dla dowolnego n :

$$m(E, 3a_n) \geq a_n$$

a tymczasem całka z funkcji $f(x)$ po zbiorze E jest skończona, mamy bowiem

$$\int_E f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2a_n}^{3a_n} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2a_n}^{3a_n} \frac{1}{a_{n-1} - 2a_n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a_{n-1} - 2a_n} < +\infty.$$

Tak więc spełnianie przez zbiór E warunku (3) nie gwarantuje związku (4). Dodajmy, że w przypadku, gdyby $f(x)$ nie było funkcją monotoniczną, także i przy założeniu (2) warunek (1) nie musiałby pociągać za sobą związku (4).

Katedra Analizy Matematycznej UJ
Otrzymano 30. XII. 1955 r.

SUMMARY

The author, in answer to a problem of S. Gołąb, proves the following theorem:

If $f(x)$ is a non-increasing, continuous function defined in the interval $(0, 1]$ satisfying the condition (1), then for each measurable set E of this interval from the inequality (2) (where $m(E, \delta)$ is the measure of common part of E and $(0, \delta)$) follows the relation (4).

The author shows also by an appropriate example that the analogous theorem for the inequality (3) is not true.