

J. Siciak

Przykład pewnego rozkładu punktów ekstremalnych

Niech E będzie dowolnym zbiorem niepustym, domkniętym i ograniczonym na płaszczyźnie zespolonej. Oznaczmy przez $f(z)$ funkcję rzeczywistą określoną i ciągłą w zbiorze E , a przez $\omega(z, \zeta)$ funkcję pary punktów z i ζ zbioru E , daną wzorem

$$\omega(z, \zeta) = |z - \zeta| e^{-f(z) - f(\zeta)}. \quad (1)$$

Oznaczmy przez $\zeta^{(n)} = \{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ układ $n+1$ punktów zbioru E , przez $V(\zeta^{(n)})$ wyrażenie

$$V(\zeta^{(n)}) = \prod_{0 \leq i < k \leq n} \omega(\zeta_i, \zeta_k) \quad (2)$$

a przez $v_n(E, \omega)$ maksimum wyrażenia (2) gdy układ $\zeta^{(n)}$ zmienia się w E i niech

$$\eta^{(n)} = \{\eta_0^{(n)}, \eta_1^{(n)}, \dots, \eta_n^{(n)}\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

będzie takim układem $n+1$ punktów zbioru E , dla którego $V(\zeta^{(n)}) = v_n(E, \omega)$. Układ (3) nazywamy wtedy *n-tym układem ekstremalnym* zbioru E względem funkcji tworzącej ω (Przy ustalonym n układów ekstremalnych może być więcej niż jeden).

Dowodzi się, że istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [v_n(E, \omega)]^{\frac{2}{n(n+1)}} = v(E, \omega). \quad (4)$$

Granice $v(E, \omega)$ nazywamy *rozwartością zbioru E względem funkcji ω* .

Oznaczmy przez E^* zbiór punktów skupienia wszystkich układów ekstremalnych (3) (tj. zbiór punktów skupienia wszystkich ciągów $\{\eta_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie k_n jest dowolną liczbą całkowitą, spełniającą nierówność $0 \leq k_n \leq n$). Oczywiście zbiór E^* jest domknięty i $E^* \subset E$. Przy ustalonym E zbiór E^* zależy od funkcji $f(z)$. Z zasady maksimum dla modułu funkcji analitycznej wynika, że gdy $f(z) = \text{const}$, to zbiór E^* nie może zawierać punktów wewnętrznych.

F. Leja zaproponował, by podać przykład takiego zbioru E i takiej funkcji $f(z)$, aby zbiór E^* pokrywał pewien obszar. Celem niniejszej noty jest właśnie podanie takiego przykładu.

Mianowicie udowodnię, że:

(*) Jeżeli E jest kołem $|z| \leq R$, $R > 0$ i $f(z) = |z|$, to zbiór E^* jest kołem $|z| \leq \varrho$, gdzie $\varrho = \min(1, R)$.

Dowód. Oznaczmy przez $\Phi_n(z, E)$ kres dolny największego z iloczynów

$$\left(\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \left| \frac{z - \zeta_k}{\zeta_j - \zeta_k} \right| \right) e^{nf(\zeta_j)}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

gdy przy ustalonych z i n układ $\zeta^{(n)}$ zmienia się w sposób dowolny w zbiorze E . F. Leja dowiódł w pracy [1], że gdy $v(E, \omega) > 0$ (co, jak można dowieść, zachodzi gdy E jest kołem $|z| \leq R$), to na całej płaszczyźnie istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\Phi_n(z, E)} = \Phi(z, E)$$

i że funkcja $\Phi(z, E)$, zwana funkcją ekstremalną odpowiadającą zbiorowi E i funkcji tworzącej ω , ma następujące własności:

$$\log \Phi(z, E) \leq f(z) \quad \text{dla } z \in E; \quad (5)$$

$$\log \Phi(z, E) = f(z) \quad \text{dla } z \in E^*; \quad (6)$$

$$\log \Phi(z, E) \geq \min_{z \in E} f(z) \quad \text{dla wszelkich } z; \quad (7)$$

(8) $\log \Phi(z, E)$ jest funkcją ciągłą na całej płaszczyźnie otwartej, harmoniczną poza E^* z wyjątkiem punktu $z = \infty$, w którym ma biegun rzędu 1;

(9) Jeżeli E_1 jest zbiorem domkniętym, $E_1 \subset E$, o rozwartości $v(E_1, \omega) > 0$, to dla $z \neq \infty$

$$\log \Phi(z, E) - \log \Phi(z, E_1) \leq 0.$$

A priori zbiór E^* może zależeć od wyboru układów ekstremalnych (3), dla $n = 1, 2, \dots$. Oznaczmy przez \mathcal{E}^* zbiór będący sumą wszystkich zbiorów E^* , odpowiadających różnym ciągom układów ekstremalnych (3). Z pracy [1] wynika, że wartości funkcji $\log \Phi(z, E)$ nie zależą od E^* . Dzięki temu w wypowiedzi własności (5), (6), (7), (8) i (9) zbiór E^* można wszędzie zastąpić zbiorem \mathcal{E}^* .

Udowodnimy najpierw, że twierdzenie (*) jest prawdziwe, gdy zastąpimy w nim zbiór E^* zbiorem \mathcal{E}^* , a następnie, że $E^* = \mathcal{E}^*$.

Zauważmy, że ze względu na symetrię zbioru E , jeżeli układ (3) jest układem ekstremalnym, to układ

$$\eta_\varphi^{(n)} = \{e^{i\varphi}\eta_0^{(n)}, e^{i\varphi}\eta_1^{(n)}, \dots, e^{i\varphi}\eta_n^{(n)}\} \quad (10)$$

gdzie φ jest dowolną liczbą rzeczywistą, jest też układem ekstremalnym zbioru E ze względu na funkcję tworzącą $\omega(z, \zeta) = |z - \zeta|e^{-|z| - |\zeta|}$. Z powyższej uwagi wynika, że zbiór \mathcal{E}^* jest albo jednym punktem $z = 0$, albo sumą pewnych okręgów koncentrycznych o środku w punkcie $z = 0$, zawartych w kole E . Zbiór \mathcal{E}^* nie może jednak redukować się do jednego punktu $z = 0$. Wtedy bowiem funkcja $\log\Phi(z, E)$ osiągałaby swe minimum w punkcie $z = 0$, będąc w otoczeniu tego punktu harmoniczną i niestałą, co jest niemożliwe.

Niech ϱ oznacza promień największego z tych okręgów koncentrycznych o środku w punkcie $z = 0$, które należą do \mathcal{E}^* . Ponieważ \mathcal{E}^* nie może redukować się do jednego tylko punktu $z = 0$, więc $\varrho > 0$. Stąd zaś, że $\mathcal{E}^* \subset E$, gdzie E jest kołem $|z| \leq R$.

Wykażę, że \mathcal{E}^* jest kołem $|z| \leq \varrho$. Przypuśćmy bowiem, że istnieje punkt z_0 , $|z_0| < \varrho$, $z_0 \in \mathcal{E}^*$. Oznaczmy przez A największy obszar zawierający w swoim wnętrzu punkt z_0 i rozłączny ze zbiorem \mathcal{E}^* . Ponieważ \mathcal{E}^* jest sumą pewnych okręgów koncentrycznych o środku w punkcie $z = 0$, więc obszar A musi być

1. albo kołem $|z| < r \leq \varrho$;
2. albo pierścieniem $0 < |z| < r \leq \varrho$;
3. albo pierścieniem $0 < r_1 < |z| < r_2 \leq \varrho$.

W przypadku 1. funkcja $\log\Phi(z, E)$ byłaby według (8) harmoniczną dla $|z| < r$, na podstawie (6) $\log\Phi(z, E) = r$ dla $|z| = r$, a według (5) i (7) $\log\Phi(0, E) = 0$. Jest to jednak niemożliwe ze względu na zasadę minimum dla funkcji harmoniczych. Przypadek 2. sprowadza się do 1., ponieważ w punkcie $z = 0$ funkcja $\log\Phi(z, E)$ miałaby osobliwość usuwalną i $\log\Phi(0, E) = 0$. W przypadku 3. funkcja $\log\Phi(z, E)$ byłaby harmoniczną w pierścieniu $r_1 < |z| < r_2$ i przyjmowałaby na brzegu $|z| = r_1$ wartość $\log\Phi(z, E) = r_1$, na brzegu $|z| = r_2$ wartość $\log\Phi(z, E) = r_2$. Na brzegu danego pierścienia $\log\Phi(z, E)$ ma te same wartości co funkcja podharmoniczna $f(z) = |z|$. Zatem musi być.

$$\log\Phi(z, E) \geq |z|, \quad \text{dla } r_1 < |z| < r_2. \quad (11)$$

Nierówności (11) i (5) dają w rozważanym pierścieniu równość $\log\Phi(z, E) = |z|$, co jest jednak niemożliwe, bo funkcja $\log\Phi(z, E)$ jest harmoniczną w danym pierścieniu, a funkcja $|z|$ nie. Rzeczywiście więc \mathcal{E}^* jest kołem $|z| \leq \varrho$.

Wobec (6) dla $z \in \mathcal{G}^*$ mamy $\log \Phi(z, E) = |z|$. W szczególności dla $|z| = \varrho$, $\log \Phi(z, E) = \varrho$. Funkcje $\log \Phi(z, E)$ i $\left(\log \frac{|z|}{\varrho} + \varrho\right)$ są harmoniczne w pierścieniu nieograniczonym $\varrho < |z| < \infty$ i mają na okręgu $|z| = \varrho$ tę samą wartość. Obie mają biegun jednokrotny w punkcie $z = \infty$ i obie są ciągłe w pierścieniu $\varrho \leq |z| < \infty$. Różnica $\log \Phi(z, E) - \log \frac{|z|}{\varrho} + \varrho$ ma więc w punkcie $z = \infty$ osobliwość usuwalną, a na okręgu $|z| = \varrho$ przyjmuje wartość zero. Musi więc ona być, na zasadzie maksimum dla funkcji harmonicznych, dla $|z| \geq \varrho$ identycznie równa zero. Zatem

$$\log \Phi(z, E) = \begin{cases} |z| & \text{gdy } |z| \leq \varrho \\ \log \frac{|z|}{\varrho} + \varrho, & \text{gdy } |z| \geq \varrho. \end{cases} \quad (12)$$

Niech E_1 oznacza okrąg $|z| = r$, gdzie $0 < r \leq R$. Ponieważ zbiór punktów skupienia układów ekstremalnych zbioru E_1 względem ω pokrywa się z E_1 , więc

$$\log \Phi(z, E_1) = \begin{cases} r, & \text{dla } |z| \leq r \\ \log \frac{|z|}{r} + r, & \text{dla } |z| \geq r. \end{cases} \quad (13)$$

Dzięki (9) dla wszelkich z mamy nierówność

$$\log \Phi(z, E) - \log \Phi(z, E_1) \leq 0,$$

więc według (12) i (13)

$$\log \frac{|z|}{\varrho} + \varrho - \left(\log \frac{|z|}{r} + r\right) \leq 0, \quad \text{dla } |z| \geq \max(\varrho, r).$$

Zatem $\log \frac{1}{\varrho} + \varrho - \left(\log \frac{1}{r} + r\right) \leq 0$, czyli

$$\frac{\varrho}{e^\varrho} \geq \frac{r}{e^r}, \quad \text{dla } 0 < r \leq R. \quad (14)$$

Ponieważ funkcja $g(r) = \frac{r}{e^r}$ osiąga maksimum dla $r = 1$, przy czym dla $0 \leq r \leq 1$ jest rosnąca, a dla $r \geq 1$ jest malejąca, więc z nierówności (14) wynika, że $\varrho = R$, gdy $R \leq 1$, oraz $\varrho = 1$, gdy $R \geq 1$. Zatem zbiór \mathcal{G}^* jest kołem $|z| \leq \varrho$, gdzie $\varrho = \min(1, R)$.

Wykażę teraz, że $\mathcal{G}^* = E^*$. W przeciwnym razie w zbiorze \mathcal{G}^* istniałby punkt z_0 , który nie należałby do zbioru E^* wraz z pewnym swym otoczeniem. Funkcja $\log \Phi(z, E)$ byłaby w tym otoczeniu harmoniczna i równocześnie równa $|z|$, co jest jednak niemożliwe, c. b. d. o.

Uwaga. Jeżeli D jest obszarem domkniętym zawartym w kole $|z| \leq \varrho$, $\varrho = \min(1, R)$ i D^* oznacza zbiór punktów skupienia układów ekstremalnych zbioru D względem funkcji tworzącej $\omega(z, \zeta) = |z - \zeta|e^{-|z| - |\zeta|}$, to $D^* = D$. Istotnie, na podstawie (9) $|z| = \log \Phi(z, E) \leq \log \Phi(z, D)$, dla $z \in D$. Na podstawie (5) $\log \Phi(z, D) \leq |z|$, dla $z \in D$. Łącząc obie ostatnie nierówności mamy w zbiorze D $\log \Phi(z, D) = |z|$. Zatem, ponieważ funkcja $\log \Phi(z, D)$ nie jest w obszarze D harmoniczna, musi być na podstawie (8) $D^* = D$.

Katedra Funkcji Analitycznych UJ

Otrzymano 9. V. 1956 r.

SUMMARY

Let E be a compact set of points of complex domain, $f(z)$ — real continuous function given in E and $\omega(z, \zeta)$ — function of pairs of points z and ζ of the set E given by

$$\omega(z, \zeta) = |z - \zeta|e^{-f(z) - f(\zeta)}$$

Let us denote by $\zeta^{(n)}$ a system of $n + 1$ points $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ of the set E and by $V_n(E)$ the maximum of the product

$$V(\zeta^{(n)}) = \prod_{0 \leq i < k \leq n} \omega(\zeta_i, \zeta_k)$$

if the system $\zeta^{(n)}$ changes in the set E . Let

$$\eta^{(n)} = \{\eta_0^{(n)}, \eta_1^{(n)}, \dots, \eta_n^{(n)}\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

be such a system of points of the set E that $V(\eta^{(n)}) = V_n(E)$ and E^* — set of the limit points of the triangular sequence $\{\eta_k^{(n)}\}$, $n = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$. For a given E the set E^* is determined by the function $f(z)$. It is known that if $f(z) = \text{const.}$, then E^* contains no interior points.

I prove that if E is the circle $|z| \leq R$, $R > 0$ and $f(z) = |z|$ then E^* is a circle $|z| = \varrho$, where $\varrho = \min(1, R)$.

LITERATURA

- [1] Leja F., *Propriétés des points extrémaux des ensembles plans et leur application à la représentation conforme*, Annales Polonici Mathematici, III₂ (1957), 319—342.