

Marek Kuczma

O sumach szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{x^n}$

§ 1. Tematem niniejszej pracy są pewne własności funkcji:

$$S_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{x^n} \quad \begin{array}{l} x > 1 \\ p = 0, 1, \dots \end{array} \quad (1)$$

Funkcje $S_p(x)$ są regularne dla $x > 1$. W tym paragrafie ograniczymy się do rozpatrywania funkcji $S_p(x)$ dla $p \geq 1$.

Na funkcje $S_p(x)$ można podać wzory rekurencyjne:

$$S_1(x) = \frac{x}{(x-1)^2},$$

$$(x-1)S_p(x) = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} S_k(x) + \frac{x}{x-1} \quad p = 2, 3, \dots$$

Wzory te otrzymujemy z tożsamości:

$$S_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)+1]^p}{x^n}.$$

Inny wzór rekurencyjny otrzymujemy różniczkując szereg (1):

$$S_{p+1}(x) = -xS'_p(x). \quad (2)$$

Wreszcie trzeci wzór, wyprowadzony przez p. D. Brydaka:

$$S_p(e^x) = (-1)^p \frac{d^p}{dx^p} \left(\frac{1}{e^x - 1} \right) \quad x > 0$$

¹⁾ Fragmenty referatu wygłoszonego na Ogólnopolskiej Sesji Naukowej Studenckich Kół Naukowych Matematyków w Krakowie (8–10 III 1956 r.).

otrzymujemy różniczkując p -krotnie tożsamość:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{e^x - 1} \quad x > 0.$$

Wykażę teraz twierdzenie:

Twierdzenie I: *Istnieją liczby a_{pi} ($p = 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, p$) takie, że*

$$S_p(x) = \frac{\sum_{i=1}^p a_{pi} x^i}{(x-1)^{p+1}}. \quad (3)$$

Dowód: Dowód poprowadzimy indukcyjnie. Dla $p = 1$ mamy

$$S_1(x) = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

Wystarczy położyć $a_{11} = 1$.

Zakładam prawdziwość wzoru (3) dla p . Wobec (2) mamy:

$$S_{p+1}(x) = -xS'_p(x) = -x \frac{d}{dx} \frac{\sum_{i=1}^p a_{pi} x^i}{(x-1)^{p+1}}.$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$S_{p+1}(x) = \frac{a_{pp}x^{p+1} + \sum_{i=2}^p [(p-i+2)a_{p,i-1} + ia_{pi}]x^i + a_{p1}x}{(x-1)^{p+2}}.$$

Kładąc:

$$a_{p+1,p+1} = a_{pp}$$

$$a_{p+1,1} = a_{p1}$$

$$a_{p+1,i} = (p-i+2)a_{p,i-1} + ia_{pi} \quad i = 2, \dots, p$$

otrzymujemy

$$S_{p+1}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{p+1} a_{p+1,i} x^i}{(x-1)^{p+2}}.$$

co należało wykazać.

Na liczby a_{pi} otrzymaliśmy wzory rekurencyjne:

$$a_{pp} = a_{p1} = 1$$

$$a_{pi} = (p-i+1)a_{p-1,i-1} + ia_{p-1,i} \quad i = 2, \dots, p-1.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{\ln x_0} < \frac{1}{t_1} < f(x_0)$$

skąd

$$t_1 < \ln x_0,$$

zatem

$$x_1 < x_0.$$

Z nierówności (4) wynika, że $f(x) \leq \frac{1}{t_1}$ dla $x > x_1$, zatem w szczególności

$$f(x_0) \leq \frac{1}{t_1} < f(x_0)$$

co być nie może.

W przypadku $f(x_0) < \frac{1}{\ln x_0}$ dowód przebiega analogicznie.

Dowód twierdzenia: Połóżmy:

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sup \sqrt[p]{\frac{S_p(x)}{p!}}.$$

Funkcja $f(x)$ jest, podobnie jak i funkcje $S_p(x)$, nieujemna i nierosnąca dla $x > 1$. Wykażę, że funkcja $f(x)$ spełnia nierówności (4).

Szereg o wyrazach dodatnich:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^p n^p}{x^n p!} \quad t > 0, x > 1$$

jest na podstawie twierdzenia o zmianie porządku sumowania w szeregach podwójnych bezwzględnie zbieżnych¹⁾ równocześnie zbieżny lub rozbieżny z szeregiem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p n^p}{x^n p!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nt}}{x^n} \quad t > 0, x > 1.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nt}}{x^n}$ jest zbieżny dla $x > e^t$, zaś rozbieżny dla $x < e^t$. Zatem i szereg:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^p n^p}{x^n p!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} S_p(x)$$

¹⁾ Zob. Sierpiński W., *Działania nieskończone*, 1948, cz. II, str. 101.

jest zbieżny dla $x > e^t$, zaś rozbieżny dla $x < e^t$. Stąd, na podstawie kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów:

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{t^p \frac{S_p(x)}{p!}} \leq 1 \quad \text{dla } x > e^t$$

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{t^p \frac{S_p(x)}{p!}} \geq 1 \quad \text{dla } x < e^t,$$

czyli

$$f(x) \leq \frac{1}{t} \quad \text{dla } x > e^t$$

$$f(x) \geq \frac{1}{t} \quad \text{dla } x < e^t,$$

Stąd na podstawie lematu $f(x) = \frac{1}{\ln x}$.

Dla dowodu twierdzenia wystarczy wykazać, że

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\frac{S_p(x)}{p!}} \geq \frac{1}{\ln x}.$$

Położmy ¹⁾

$$T_p(y) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p e^{-ny} \quad y > 0.$$

Oczywistym jest oszacowanie:

$$T_p(y) \geq \left[\frac{p}{y} \right]^p e^{-\left[\frac{p}{y} \right] y}$$

gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą (entier) liczby a . Stąd:

$$\sqrt[p]{\frac{T_p(y)}{p!}} \geq \sqrt[p]{\frac{1}{p!} \left[\frac{p}{y} \right]^p e^{-\left[\frac{p}{y} \right] y}} = e^{-\frac{[\frac{p}{y}]}{p} y} \sqrt[p]{\frac{p^p}{p!} \left[\frac{p}{y} \right]}$$

skąd, wobec

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{p}{y} \right]}{p} = \frac{1}{y}$$

¹⁾ Tę część dowodu zawdzięczam p. A. Pełczyńskiemu z Warszawy. P. Pełczyński wykazał również przez szacowanie, że $\limsup_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\frac{S_p(x)}{p!}} < \frac{1}{\ln x}$ jednakże dowód opierał się na bardzo żmudnych rachunkach.

oraz

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\frac{p^p}{p!}} = e$$

jest

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\frac{T_p(y)}{p!}} \geq \frac{1}{y}.$$

Kładąc $y = \ln x$ otrzymujemy

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\frac{S_p(x)}{p!}} \geq \frac{1}{\ln x}$$

co dowodzi twierdzenia.

Wniosek: Szereg $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{S_p(x)}{S_p(x_0)}$ jest zbieżny dla $x > x_0$.

Dowód: $\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\frac{S_p(x)}{S_p(x_0)}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\frac{S_p(x)}{p!}} \sqrt[p]{\frac{p!}{S_p(x_0)}} = \frac{\ln x_0}{\ln x} < 1$ dla $x > x_0$.

§ 3. Zajmiemy się teraz szeregami postaci $\sum_{p=0}^{\infty} u_p S_p(x)$, gdzie u_p są liczbami rzeczywistymi. Wykażę twierdzenie:

Twierdzenie III. Jeżeli szereg

$$\sum_{p=0}^{\infty} u_p S_p(x) \tag{5}$$

jest zbieżny dla $x = x_0$, to jest bezwzględnie zbieżny dla $x > x_0$ i jednostajnie zbieżny dla $x \geq x_0 + h$, gdzie h jest dowolną liczbą dodatnią.

Dowód: Wobec zbieżności szeregu (5) w punkcie x_0 jest $\lim_{p \rightarrow \infty} |u_p S_p(x_0)| = 0$, więc tym bardziej $|u_p S_p(x_0)| \leq M$. Dalej:

$$|u_p S_p(x)| = |u_p S_p(x_0)| \frac{S_p(x)}{S_p(x_0)} \leq M \frac{S_p(x)}{S_p(x_0)}$$

co dowodzi bezwzględnej zbieżności szeregu (5) dla $x > x_0$.

Zbieżność jednostajna dla $x \geq x_0 + h$ wynika z nierówności:

$$|u_p S_p(x)| \leq |u_p S_p(x_0 + h)| \quad \text{dla } x \geq x_0 + h.$$

Z udowodnionego twierdzenia wynika, że albo szereg (5) jest rozbieżny dla wszystkich x , albo istnieje punkt \bar{x} taki, że szereg (5) jest zbieżny bezwzględnie dla $x > \bar{x}$, zaś rozbieżny dla $x < \bar{x}$. Wykażę twierdzenie:

Twierdzenie IV: Szereg (5) jest bezwzględnie zbieżny dla $x > e^{\limsup \sqrt[p]{|u_p|^{p!}}}$, zaś rozbieżny dla $x < e^{\limsup \sqrt[p]{|u_p|^{p!}}}$.

$$\text{Dowód: } \limsup \sqrt[p]{|u_p S_p(x)|} = \limsup \sqrt[p]{\frac{S_p(x)}{p!}} |u_p| p! = \lim \sqrt[p]{\frac{S_p(x)}{p!}} \times \\ \times \limsup \sqrt[p]{|u_p| p!} = \frac{\limsup \sqrt[p]{|u_p| p!}}{\ln x}.$$

Zatem

$$\limsup \sqrt[p]{|u_p S_p(x)|} < 1 \quad \text{dla } x > e^{\limsup \sqrt[p]{|u_p| p!}}$$

$$\limsup \sqrt[p]{|u_p S_p(x)|} > 1 \quad \text{dla } x < e^{\limsup \sqrt[p]{|u_p| p!}}$$

co dowodzi twierdzenia.

§ 4. Niech będzie dana funkcja całkowita $f(t) \neq 0$. Wykażać twierdzenie:

Twierdzenie V: Jeżeli $f^{(n)}(0) \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$), to

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f^{(n)}(0)} = \ln \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f(n)}.$$

Dowód: Utwórzmy szereg:

$$\sum_{p=0}^{\infty} u_p S_p(x) \quad (6)$$

gdzie $u_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \geq 0$. Na podstawie twierdzenia o zmianie porządku sumowania jest on równocześnie zbieżny lub rozbieżny z szeregiem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \frac{1}{x^n}. \quad (7)$$

Szereg (6) jest zbieżny dla $x > e^{\limsup \sqrt[p]{f^{(p)}(0)}}$, zaś szereg (7) dla $x > \limsup \sqrt[n]{f(n)}$. Jeżeli jedna z powyższych granic jest nieskończona, to oba szeregi (6) i (7) są rozbieżne dla wszystkich x i druga granica też musi być nieskończona. Jeżeli zaś szeregi (6) i (7) są zbieżne w jakimś punkcie, to obie granice są skończone i zachodzi równość:

$$e^{\limsup \sqrt[p]{f^{(p)}(0)}} = \limsup \sqrt[n]{f(n)}$$

skąd po zlogarytmowaniu otrzymujemy tezę.

Jeżeli $f^{(n)}(0)$ nie są stałego znaku, twierdzenie jest nieprawdziwe. Na przykład, dla $f(t) = \sin t$ mamy $\limsup \sqrt[n]{|f^{(n)}(0)|} = 1$, $\ln \limsup \sqrt[n]{|f(n)|} \leq 0$. Można jednak wykazać twierdzenie:

