

A. Szybiak

## O asymptotycznym zachowaniu się całki Fouriera-Poissona

Niech  $f(x)$  ( $x = \{x_1, \dots, x_m\}$ ) będzie funkcją mierzalną i lokalnie sumowalną w  $m$ -wymiarowej przestrzeni kartezjańskiej  $\mathcal{E}^m$ . Wprowadźmy oznaczenia:

$$x \pm y = \{x_1 \pm y_1, \dots, x_m \pm y_m\}$$

$$|x| = \left( \sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \Sigma(r, x) = \{y: |x-y| = r\},$$

$$L(f, r, x) = \frac{\int_{\Sigma(r, x)} f(y) dS}{\int_{\Sigma(r, x)} dS},$$

gdzie  $dS$  oznacza element powierzchni kuli  $\Sigma(r, x)$ . Średnią całkową  $L$  można również wyrazić w sposób następujący: Niech  $v$  oznacza wersor wektora wodzącego punktu  $y$ , a  $dS'$  element powierzchni kuli jednostkowej  $\Sigma(1, 0)$ . Mamy wtedy

$$L(f, r, x) = \int_{\Sigma(1, 0)} f(x + rv) dS'.$$

Rozważmy zagadnienie Cauchy'ego (zredukowane) dla równania

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{w } \mathcal{E}^m \times \{t: 0 < t < \infty\}$$

z warunkiem początkowym

$$\lim_{t \downarrow 0} u(t, x) = f(x)$$

w każdym punkcie lebesgueowskim funkcji  $f$ .

Wiadomo, że jeżeli przy każdym  $\varepsilon > 0$  mamy

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \exp\{-|x|^{2-\varepsilon}\} \cdot f(x) = 0,$$

to zagadnienie powyższe posiada rozwiązanie wyrażające się wzorem

Fouriera-Poissona

$$u(t, x) = \int_{\mathcal{E}^m} (2\pi t)^{-\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\} f(y) dy$$

( $dy = dy_1 \dots dy_m$ ).

W przypadku, gdy  $m = 1$  M. Krzyżański udowodnił, że jeśli istnieją granice

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g_- \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g_+,$$

to przy każdym  $x$  istnieje  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x)$  i granica ta jest równa  $(g_+ + g_-)/2$ .

Udowodnimy następujące

**Twierdzenie.** Jeżeli  $m \geq 2$  i dla danego  $x \in \mathcal{E}^m$  istnieje  $\lim_{r \rightarrow \infty} L(f, r, x)$ , to istnieje również  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x)$  i granice te są równe.

**Dowód.** Ustalmy punkt  $x$  spełniający warunek twierdzenia. Niech  $\eta$  będzie ustaloną liczbą dodatnią. Mamy

$$\begin{aligned} u(t, x) &= (2\pi t)^{-\frac{m}{2}} \int_{|y-x| \leq \eta} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\} f(y) dy + \\ &+ (2\pi t)^{-\frac{m}{2}} \int_{|y-x| > \eta} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\} f(y) dy. \end{aligned} \quad (1)$$

Oznaczmy pierwszą i drugą całkę w (1) odpowiednio przez  $u_1(t, x)$  i  $u_2(t, x)$ . Mamy

$$|u_1(t, x)| \leq (2\pi t)^{-\frac{m}{2}} \int_{|y-x| > \eta} |f(y)| dy \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0. \quad (2)$$

Całkę dla  $u_2$  przekształcimy stosując podstawienie  $y = x + 2\sqrt{t}z$ . Mamy wtedy  $dy = (2\sqrt{t})^m dz$  i całka dla  $u$  przyjmie postać

$$u_2(t, x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{|z| > \eta/2\sqrt{t}} \exp\{-|z|^2\} f(x + 2\sqrt{t}z) dz.$$

Wprowadzając współrzędne sferyczne otrzymamy  $dz = r^{m-1} dr dS'$  gdzie  $r$  oznacza długość promienia wodzącego punktu  $z$ , a  $dS'$  element powierzchni kuli jednostkowej. Oznaczając przez  $v$  wektor wektora wodzącego punktu  $z$

wyrazimy  $u_z$  przez

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\eta/2\sqrt{t}}^{\infty} dr \exp\{-r^2\} r^{m-1} \int_{\Sigma(1,0)} f(x+2\sqrt{t}rv) dS' = \\ & = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\eta/2\sqrt{t}}^{\infty} \exp\{-r^2\} r^{m-1} L(f, 2\sqrt{t}r, x) dr. \end{aligned} \quad (3)$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_0^{\infty} \exp\{-r^2\} r^{m-1} dr = K_m.$$

Niech będzie dane dowolne  $\varepsilon > 0$ . Obierzmy liczbę  $\eta$  tak dużą, by dla  $R > \eta$  zachodziła nierówność

$$|L(f, R, x) - \lim_{r \rightarrow \infty} L(f, r, x)| < \varepsilon.$$

Korzystając z wyrażenia (3) dla  $u_z$  otrzymamy wobec

$$r > \eta/2\sqrt{t}, \quad \text{czyli} \quad 2\sqrt{t}r > \eta$$

równość

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |u(t, x) - \lim_{r \rightarrow \infty} L(f, r, x) K_m| < \varepsilon.$$

skąd wobec (2) oraz dowolności liczby  $\varepsilon$  otrzymujemy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = K_m \lim_{r \rightarrow \infty} L(f, r, x).$$

Stałą  $K_m$  obliczamy kładąc  $f(x) \equiv 1$ . Wtedy  $u(t, x) \equiv 1$  i  $L(f, x, r) \equiv 1$ , skąd  $K_m \equiv 1$ .

Na prostych przykładach można się przekonać, że z zachowania się granicy  $\lim_{r \rightarrow \infty} L(f, r, x)$ , rozpatrywanej jako funkcji punktu  $x$ , nie można wyciągnąć dalej idących wniosków co do zachowania się samej funkcji  $f$ . Np. stąd, że  $\lim_{r \rightarrow \infty} L(f, r, x) = L = \text{const.}$  w pewnym obszarze, nie wynika nawet, że  $f(x) \rightarrow L \cdot |\Sigma(1, 0)|$  według miary.

Katedra Analizy Matematycznej UJ

Otrzymano 3. XII 1956 r.

## SUMMARY

*On the asymptotic behaviour of the Fourier-Poisson integral.*

We consider a solution of the first initial problem for the heat conduction.  $u(t, x)$  denoting the solution with the initial values  $f(x)$  we obtain the result: if for a given  $x$  there exists the limit value of the integral mean of  $f$  taken on the spheres of the centre in  $x$ , then there exists also  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x)$  and these both limits are equal.

## LITERATURA

- [1] Krzyżański M., *Sur l'allure asymptotique des potentiels de chaleur et de l'intégrale de Fourier-Poisson*, Ann. Pol. Math., III 2.