ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
Nr 18 MATEMATYKA — FIZYKA — CHEMIA Z. 4 1958

*Józef Siciak*

# O rozkładzie punktów ekstremalnych odpowiadających funkcjom schodkowym w pewnej klasie zbiorów płaskich

1. Wstęp. Niech $E$ będzie zbiorem domkniętym i ograniczonym o pojemności $c(E)$ dodatniej, $f(z)$ funkcją rzeczywistą ciągłą określoną na $E$, $y^{(n)} = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ układem dowolnych $n+1$ punktów zbioru $E$, $\Phi_n(z, E, f)$ kresem dolnym największego z iloczynów

$$\Phi^{(j)}(z, y^{(n)}, f) = \Big(\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n} \left|\frac{z-y_k}{y_j-y_k}\right| e^{nf(y_j)}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

gdy układ $y^{(n)}$ zmienia się w sposób dowolny w zbiorze $E$, a $x^{(n)} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — układem $n+1$ punktów zbioru $E$, spełniającym warunek $\prod\limits_{0\leqslant i<k\leqslant n} \frac{|x_i-x_k|}{e^{f(x_i)+f(x_k)}} = \max\limits_{y^{(n)}\in E} \prod\limits_{0\leqslant i<k\leqslant n} \frac{|y_i-y_k|}{e^{f(y_i)+f(y_k)}}$.

Układ $x^{(n)}$ nazywa się *n-tym układem ekstremalnym zbioru E* względem funkcji $f$. Wiadomo [1], że istnieje granica

$$\Phi(z, E, f) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Phi_n(z, E, f)} \tag{1}$$

i, że funkcja $\Phi(z, E, f)$ ma następujące własności:

(2) $\Phi(z, E, f) = e^{f(z)}$, gdy $z \in E_f^*$, gdzie $E_f^*$ oznacza zbiór punktów skupienia ciągu trójkątnego punktów ekstremalnych $\{x_i^{(n)}\}$ $i = 0, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$, lub, gdy w punkcie $z$ funkcja $f(z)$ osiąga minimum;

(3) $\Phi(z, E, f) \leqslant e^{f(z)}$, gdy $z \in E$;

(4) Jeżeli $F$ jest zbiorem domkniętym, $F \subset E$ i $c(F) > 0$, to na całej płaszczyźnie zachodzi nierówność

$$\Phi(z, E, f) \leqslant \Phi(z, F, f);$$

(5) $\log\Phi(z, E, f)$ jest funkcją harmoniczną w każdym skończonym punkcie płaszczyzny nie należącym do $E_f^*$, mającą w punkcie $z = \infty$ biegun logarytmiczny rzędu 1; w punktach zbioru $E$, które wraz z pewnym kontinuum należą do $E$ funkcja $\log\Phi(z, E, f)$ jest ciągła;

(6) Jeżeli $E_{\lambda_i f}$ $(i = 1, 2)$ oznacza zbiór tych punktów $z_0$ zbioru $E$ dla których $\log\Phi(z_0, E, \lambda_i f) = \lambda_i f(z_0)$, przy czym $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2$, to $E_{\lambda_2 f} \subset E_{\lambda_1 f}$.

Niech $E$ będzie zbiorem złożonym z krzywej Jordana $E_1$ oraz dowolnego zbioru domkniętego $E_0$ leżącego w jej wnętrzu, a $f(z)$ — funkcją schodkową o wartości 1 na $E_1$ i 0 na $E_0$. F. Leja w pracy [2] postawił pytanie czy dla danego zbioru $E$ i funkcji $f(z)$ zawsze istnieje liczba dodatnia $\lambda_0$ taka, że $\Phi(z, E, \lambda_0 f) = e^{\lambda_0 f(z)}$ dla $z \in E$.

Dowodzę, że odpowiedź na powyższe pytanie w ogólnym przypadku jest negatywna. Niemniej jednak, jeżeli krzywa $E$ spełnia pewne dodatkowe założenia, to odpowiedź jest pozytywna.

2. Konstrukcja przykładu. Będziemy rozważać zbiór $E$, będący sumą dwu zbiorów rozłącznych $E_0$ i $E_1$ oraz funkcję $f$, przyjmująca wartość 0 na $E_0$ i wartość 1 na $E_1$ [1]).

**Lemat 1.** *Jeżeli $E_0$ jest okręgiem $|z| = r$, a $E_1$ okręgiem $|z| = R$, $R > r$ i $\log \frac{R}{r} = \lambda_0$, to $E_{\lambda_0 f} = E$.*

**Dowód.** Ponieważ funkcja $f$ osiąga minimum w każdym punkcie zbioru $E_0$ więc dzięki (2) $E_0 \subset E_{\lambda f}$ dla każdego $\lambda > 0$. Zatem funkcja $R(z) = G(z, E_0) - \log\Phi(z, E, \lambda_0 f)$, gdzie

$$G(z, E_0) = \begin{cases} \log \dfrac{|z|}{r}, & \text{gdy} \quad z \geqslant r, \\ 0, & \text{gdy} \quad z < r, \end{cases}$$

jest harmoniczna poza $E_{\lambda_0 f}$, ciągła dzięki (5) w płaszczyźnie domkniętej oraz równa 0 w $E_{\lambda_0 f}$. Stąd wynika, że $R(z) \equiv 0$, czyli $\log\Phi(z, E, \lambda_0 f) = \log \frac{R}{r}$, gdy $z \in E$. Zatem $E_1 \subset E_{\lambda_0 f}$ co łącznie z inkluzją $E_0 \subset E_{\lambda_0 f}$, daje tezę lematu 1.

**Lemat 2.** *Jeżeli $E_0$ jest okręgiem $|z| = 1$, $n$-dowolną liczbą naturalną $C_n$ — okręgiem $|z| = 2 + \frac{1}{n}$, $f(z)$ — funkcją równą 0 na $E_0$ i 1 na $C_n$, to istnieje liczba $\Theta_n > 0$ taka, że jeżeli $C_n'$ oznacza zbiór punktów z okręgu $C_n$, dla których $|\operatorname{Arg} z| > \Theta_n$, to*

$$\log\Phi\left(2, E_0 + C_n', \frac{1}{5n} f\right) < \frac{1}{5n}.$$

**Dowód.** Ponieważ $\frac{1}{5n} < \log\left(2 + \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, więc na podstawie lematu 1 i własności (6)

$$\log\Phi\left(z, E_0 + C_n, \frac{1}{5n} f\right) = \frac{1}{5n}, \quad \text{dla} \quad z \in C_n.$$

---

[1]) W dalszym ciągu zbiory na których funkcja $f$ przyjmuje wartość 0 lub 1 będą zaopatrywane odpowiednio wskaźnikiem 0 lub 1.

Oznaczmy przez $C(\Theta_n')$ zbiór punktów $z$ okręgu $C_n$, dla których $|\mathrm{Arg}\, z| \geqslant \Theta_n'$. Z (3) i (4) wynika, że

$$\frac{1}{5n} = \log\Phi\left(z, E_0 + C_n, \frac{1}{5n}f\right) \leqslant \log\Phi\left(z, E_0 + C(\Theta_n'), \frac{1}{5n}f\right) \leqslant \frac{1}{5n},$$
$$\text{gdy} \quad z \in C(\Theta_n').$$

Zatem $\log\Phi\left(z, E_0 + C(\Theta_n'), \frac{1}{5n}f\right) = \frac{1}{5n}$, gdy $z \in C(\Theta_n')$.

Jeżeli $\Theta_n' \to 0$, to funkcja $\log\Phi\left(z, E_0 + C(\Theta_n'), \frac{1}{5n}f\right)$ zmierza w pierścieniu $1 \leqslant |z| \leqslant 2 + \frac{1}{n}$ jednostajnie do rozwiązania problemu Dirichleta z obłożeniem równym 0 na $E_0$ i $\frac{1}{5n}$ na $C_n$. Ponieważ punkt 2 jest punktem wewnętrznym danego pierścienia i wartości rozważanego rozwiązania problemu Dirichleta leżą w przedziale $\left(0, \frac{1}{5n}\right)$, więc gdy $\Theta_n'$ jest dostatecznie małe spełniona jest nierówność

$$\log\Phi\left(2, E_0 + C(\Theta_n'), \frac{1}{5n}f\right) < \frac{1}{5n}.$$

Wystarczy to dostatecznie małe $\Theta_n'$ oznaczyć przez $\Theta_n$ i łuk $C(\Theta_n')$ przez $C_n'$, by zakończyć dowód lematu 2.

Dobierzmy teraz liczby $\Theta_n$, $n = 1, 2, \ldots$, w ten sposób, by $\lim\limits_{n\to\infty}\Theta_n = 0$ i połączmy punkt $z_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)e^{i\Theta_n}$ z punktem $z_{n+1} = \left(2 + \frac{1}{n+1}\right)e^{i\Theta_{n+1}}$ oraz punkt $\bar{z}_n$ z punktem $\bar{z}_{n+1}$ odpowiednio odcinkami. Określmy zbiór $E_1$ jako sumę łuku $C_1'$, punktu $z = 2$ oraz odcinków $[z_n, z_{n+1}]$ i $[\bar{z}_n, \bar{z}_{n+1}]$ $n = 1, 2, \ldots$, a przez $E_0$ w dalszym ciągu okrąg jednostkowy. Udowodnię

**Twierdzenie 1.** *Dla każdego $\lambda > 0$ jest $E_{\lambda f} \neq E$ (tymbardziej $E_{\lambda f}^* \neq E$), gdzie $E$ oznacza sumę zbiorów $E_0$ i $E_1$ wyżej określonych.*

**Dowód.** Przypuśćmy, że istnieje $\lambda_0 > 0$, że $E_{\lambda_0 f} = E$, więc w szczególności $2 \in E_{\lambda_0 f}$ i $\log\Phi(2, E, \lambda_0 f) = \lambda_0$. Z określenia zbioru $E_1$ wynika, że jest on krzywą Jordana. Oznaczmy przez $F_1$ zbiór będący iloczynem pierścienia $2 \leqslant |z| \leqslant 3$ oraz domknięcia wnętrza krzywej $E_1$ a przez $F$ sumę $E_0$ i $F_1$. Z zasady maksimum dla modułu funkcji analitycznej wynika, że $n$-te układy ekstremalne zbiorów $E$ i $F$ są identyczne, co pociąga za sobą w konsekwencji równość $\log\Phi(z, E, \lambda_0 f) = \log\Phi(z, F, \lambda_0 f)$. Ponieważ $C_n' \subset F_1$ więc na podstawie (4) $\log\Phi(z, E, \lambda_0 f) \leqslant \log\Phi(z, E_0 + C_n', \lambda_0 f)$ $n = 1, 2, \ldots$, na podstawie zaś (3) i tej ostatniej nierówności mamy w punkcie $z = 2$

$$\log\Phi(2, E_0 + C'_n, \lambda_0 f) = \lambda_0, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Ostatnia równość sprzeczna jest z lematem 2 i własnością (6), bo gdy $n$ jest dostatecznie duże to $\lambda_0 > \frac{1}{5n}$ i $\log\Phi\left(2, E_0 + C'_n, \frac{1}{5n} f\right) = \frac{1}{5n}$.

3. Pewna klasa zbiorów $E = E_0 + E_1$, dla których przy dostatecznie małym $\lambda$ dodatnim $E_{\lambda f} = E$.

Niech $E_0$ będzie dowolnym zbiorem domkniętym i ograniczonym a $E_1$ okręgiem o promieniu $R$, w którego wnętrzu leży zbiór $E_0$. Oznaczmy przez $F_0$ najmniejsze koło domknięte, koncentryczne z okręgiem $E_1$ i takie, że $E_0 \subset F_0$.

**Lemat 3.** *Istnieje $\lambda_0 > 0$, że $E_{\lambda_0 f} = E$, przy czym $\lambda_0 = \log \frac{R}{r}$, gdzie $r$ oznacza promień koła $F_0$.*

**Dowód.** Ponieważ $E \subset F = F_0 + E_1$, więc dzięki (4) $\log\Phi(z, E, \lambda_0 f) \geqslant$ $\geqslant \log\Phi(z, F, \lambda_0 f)$. Ponieważ lemat 1 pozostaje prawdziwy gdy zastąpić w jego wypowiedzi okrąg $E_0$ przez pełne koło o tym okręgu, więc $F_{\lambda_0 f} = F$, co łącznie z ostatnią nierównością oraz własnością (3) daje tezę lematu 3.

Będziemy mówić, że *krzywa Jordana $E_1$ ma własność (W)*, jeżeli do każdego punktu $z_0 \in E_1$ istnieje domknięte (o promieniu $R(z_0)$) koło $K_1(z_0)$, na brzegu którego leży punkt $z_0$ oraz $E_1 = E_1 \cdot K_1(z_0)$, przy czym rodzina promieni $R(z_0)$, gdy punkt $z_0$ przebiega $E_1$, jest ograniczona.

Krzywa mająca własność (W) jest wypukła.

**Twierdzenie 2.** *Jeżeli $E = E_1 + E_0$, jest dowolnym zbiorem domknięi ograniczonym a $E_1$ krzywą Jordana mającą własność (W) i zawierającą w swoim wnętrzu zbiór $E_0$, to istnieje dostatecznie mała liczba dodatnia $\lambda_0$ taka, że $E_{\lambda_0 f} = E$.*

**Dowód.** Oznaczmy przez $r$ odległość zbioru $E_0$ od $E_1$, przez $\bar{R} =$ $= \overline{\text{kres}}_{z_0 \in E_1} R(z_0)$, a przez $\underline{R} = \underline{\text{kres}}_{z_0 \in E_1} R(z_0)$. Oczywiście $\underline{R} > r > 0$. Udowodnimy, że za liczbę $\lambda_0$, o której jest mowa w tezie twierdzenia wystarczy przyjąć

$$\lambda_0 = \log \frac{\bar{R}}{\underline{R} - r}.$$

Rzeczywiście, niech bowiem $z_0$ będzie ustalonym punktem zbioru $E_1$. Wtedy stosując lemat 1 do zbioru $F = F_0 + C_1(z_0)$, gdzie $F_0$ oznacza domknięte koło o promieniu $R(z_0) - r = r(z_0)$ koncentryczne z kołem $K_1(z_0)$ a $C_1(z_0)$ brzeg koła $K_1(z_0)$, mamy, przy $\lambda(z_0) = \log \frac{R(z_0)}{r(z_0)}$, $F_{\lambda(z_0) f} = F$. Ponieważ $\lambda(z_0) \geqslant \lambda_0$, więc dzięki (6) również $F_{\lambda_0 f} = F$. Ale $\tilde{F} = E_0 + C_1(z_0)$ zawarte jest w $F$, więc na podstawie (4) oraz równości $F_{\lambda_0 f} = F$ jest $\tilde{F}_{\lambda_0 f} = \tilde{F}$.

Przyjmijmy $G_1 = K_1(z_0)\cdot\overline{CE_1}$ oraz $G = E_0 + G_1$. Z zasady maksimum dla modułu funkcji analitycznej wynika, że układy ekstremalne zbiorów $\widetilde{F}$ i $G$ są identyczne, zatem i odpowiednie funkcje ekstremalne są identyczne $\Phi(z, G, \lambda_0 f) \equiv \Phi(z, F, \lambda_0 f)$. Ponieważ $E \subset G$, więc dzięki (4) $\log\Phi(z, E, \lambda_0 f) \geqslant \log E(z, G, \lambda_0 f) = \log(z, \widetilde{F}, \lambda_0 f)$ dla dowolnego $z$. Dla punktu $z_0$ ostatnia oraz (3) nierówność dają równość $\log\Phi(z_0, E, \lambda_0 f) = \lambda_0$, czyli $z_0 \in E_{\lambda_0 f}$. Ponieważ jednak liczba $\lambda_0$ nie zależy od $z_0$, więc $E_1 \subset E_{\lambda_0 f}$, co wraz z inkluzją $E_0 \subset E_{\lambda_0 f}$ wynikającą z (2) daje tezę twierdzenia.

Uwaga. Krzywa $E_1$, o której mowa w twierdzeniu 1, posiada „ostrze" wnikające do jej wnętrza. Jest rzeczą prawdopodobną, że twierdzenie 2 pozostaje prawdziwe, jeśli o krzywej $E_1$ założyć tylko, że jest wypukła.

Katedra Funkcji Analityczych UJ

Otrzymano 26. IV 1956 r.

## SUMMARY

Let $E_1$ be a Jordan curve, $E_0$ — a closed point set interior to $E_1$, $f$ — a function equal 1 on $E_1$ and 0 on $E_0$ and $E_f^*$ — a set of the limit points of the traingular sequence $\{x_k^{(n)}\}$ $k = 0, 1, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$ of the extremal points of $E = E_1 + E_0$ with respect to $f$.

There is given an example of $E$, for which $E_{\lambda f}^* \neq E$ for any $\lambda > 0$. But if $E_1$ satisfies a condition $W$ (see above) then there exists a positive real number $\lambda_0$ such that for every $\lambda < \lambda_0$, $\lambda > 0$ we have $E_{\lambda f}^* = E$. The paper is the answer on the question of F. Leja posed in his paper [2].

## BIBLIOGRAFIA

[1] Leja F., *Propriétés des points extrémaux des ensembles plans et leur application à la représentation conforme*, Ann. Pol. Math. III 2.

[2] Leja F., *Polynomes extrémaux et la représentation conforme de domaines doublement connexes*, Ann. Pol. Math. 1 (1955), p. 13—28.