ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
Nr 22 PRACE MATEMATYCZNE ZESZYT 5 1959

Jerzy Górski

O granicy pewnego funkcjonału związanego z pojemnością zbioru płaskiego

Limits of a Certain Functional Connected With the Capacity of a Plane Set

Niech E_1 i E_2 będą rozłącznymi kontinuami na płaszczyźnie, nie redukującymi się do punktów. Załóżmy, że zbiór $E = E_1 + E_2$ jest brzegiem obszaru dwuspójnego D, zawierającego punkt $z = \infty$. Oznaczmy przez $f(z)$ funkcję rzeczywistą, ciągłą, określoną na zbiorze E w następujący sposób

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } z \in E_1, \\ 1, & \text{gdy } z \in E_2, \end{cases} \tag{1}$$

i niech λ oznacza parametr rzeczywisty.

Oznaczmy przez $v(E;\ \lambda f)$ rozwartość zbioru E ze względu na funkcję tworzącą (por. [1], str. 258)

$$\omega(z, \zeta) = |z-\zeta| \exp\{-\lambda[f(z)+f(\zeta)]\}, \tag{2}$$

a przez $\Phi(z;\ \lambda f, E)$ funkcję ekstremalną zbioru E odpowiadającą funkcji tworzącej (2) (patrz [1], str. 458). Funkcję $\Phi(z;\ \lambda f, E)$ można przedstawić wzorem (por. [2], str. 35)

$$\log\Phi(z;\ \lambda f, E) = \int_E \log|z-\zeta|\, d\mu_{\lambda f}(\zeta) + \log\frac{1}{v(E;\ \lambda f)} - \int_E f(\zeta)\, d\mu_{\lambda f}(\zeta), \tag{3}$$

gdzie $\mu_{\lambda f}$ oznacza graniczny rozkład masy jednostkowej dodatniej na zbiorze E, związany z funkcją $f(z)$. Wobec (1) wzór (3) przyjmuje postać

$$\log\Phi(z;\ \lambda f, E) = \int_E \log|z-\zeta|\, d\mu_{\lambda f}(\zeta) + \log\frac{1}{v(E;\ \lambda f)} - \lambda\mu_{\lambda f}(E_2).$$

Funkcja $\log\Phi(z;\ \lambda f, E)$ jest funkcją harmoniczną w D poza punktem $z = \infty$, w którym posiada biegun logarytmiczny 1-go rzędu. Dla λ dostatecznie małego funkcja $\log\Phi(z;\ \lambda f, E)$ posiada granicę przy z zmierzającym z obszaru D do jakiegokolwiek punktu $z_0 \in E$ (por. [2], str. 35)

$$\lim_{z\to z_0\in E} \log\Phi(z;\ \lambda f, E) = \begin{cases} 0, & z_0 \in E_1 \\ \lambda, & z_0 \in E_2 . \end{cases}$$

Oznaczmy przez $G(z;\ \infty, E)$ funkcję Greena dla obszaru D z biegunem w punkcie $z = \infty$, a przez $w(z;\ E_1, E_2)$ miarę harmoniczną zbioru E_2 (patrz [3], str. 373), wówczas

$$\log\Phi(z;\ \lambda f, E) \equiv G(z;\ \infty, E) + \lambda w(z;\ E_1, E_2) .$$

Odejmując stronami $\log|z|$ i przechodząc do granicy, gdy $z\to\infty$, otrzymujemy następujący wzór:

$$\log\frac{1}{v(E;\ \lambda f)} - \lambda\mu_{\lambda f}(E_2) = \log\frac{1}{d(E)} + \lambda w(\infty;\ E_1, E_2) ,$$

gdzie $d(E)$ oznacza średnicę pozaskończoną zbioru E. Liczba $w(\infty;\ E_1, E_2) = \mu_0(E_2)$ oznacza ilość masy położonej na zbiorze E_2 przy swobodnym rozkładzie masy 1-wej na zbiorze E_2 (por. [5]), tj. przy rozkładzie odpowiadającym funkcji tworzącej $\omega(z, \zeta) = |z-\zeta|$. Wzór poprzedni można zatem przedstawić w następującej postaci:

$$\log\left[\frac{v(E;\ \lambda f)}{d(E)}\right]^{1/\lambda} = -\mu_{\lambda f}(E_2) - \mu_0(E_2) .$$

Ponieważ $\mu_{\lambda f}$ jest funkcjonałem ciągłym względem funkcji $f(z)$ (patrz [4], str. 26) otrzymujemy stąd wzór

$$\lim_{\lambda\to 0}\log\left[\frac{v(E;\ \lambda f)}{d(E)}\right]^{1/\lambda} = -2\mu_0(E_2) . \tag{4}$$

Z definicji rozwartości $v(E;\ \lambda f)$ wynika, że można przedstawić ją następującym wzorem:

$$v(E;\ \lambda f) = \delta(E;\ \lambda f)/\exp[2\lambda\mu_{\lambda f}(E_2)] , \tag{5}$$

gdzie $\delta(E;\ \lambda f)$ oznacza granicę średniej geometrycznej z iloczynu wzajemnych odległości punktów n-go układu ekstremalnego, związanego z funkcją (2) (por. [2], str. 33 i definicję rozwartości). Wobec (5) wzór (4) można przedstawić w następującej postaci

$$\lim_{\lambda\to 0}\log\left[\frac{\delta(E;\ \lambda f)}{d(E)}\right]^{1/\lambda} = 0 . \tag{6}$$

Otrzymany rezultat można wyrazić w postaci następującego twierdzenia: Wyrażenie $\log\dfrac{\delta(E;\ \lambda f)}{d(E)}$ zmierza do zera przy $\lambda\to 0$ szybciej niż λ.

Rozważmy obecnie przypadek, gdy zbiór $E = E_1 + E_2$ jest brzegiem obszaru dwuspójnego, ograniczonego Δ, przy czym każda ze składowych E_i, $i = 1, 2$ jest wspólnym brzegiem dwóch obszarów: ograniczonego i nieograniczonego. Niech zbiór E_2 będzie brzegiem zewnętrznym obszaru Δ. Oznaczmy przez E_2^λ część zbioru E_2 pokrytą przez masę określoną rozkładem $\mu_{\lambda f}$. Używając poprzednich oznaczeń mamy w przypadku, gdy $E_2^\lambda \neq E_2$

$$\log\left[\frac{v(E;\ \lambda f)}{d(E^\lambda)}\right]^{1/\lambda} = -\mu_{\lambda f}(E_2) - \mu_0(E_2^\lambda)\,, \tag{7}$$

gdzie $E^\lambda = E_1 + E_2^\lambda$ oznacza zbiór pokryty przez masę przy rozkładzie określonym funkcją $\mu_{\lambda f}$. Gdy $\lambda \to 0$ mamy $\mu_{\lambda f}(E_2) \to 1$, $\mu_0(E_2^\lambda) \to 1$. (por. [6], str. 25).

Jeżeli $E_2^\lambda = E_2$, to dla punktu z leżącego w obszarze nieograniczonym $D_\infty(E_2)$, którego brzegiem jest zbiór E_2, zachodzi wzór

$$\log\Phi(z;\ \lambda f, E) \equiv G(z;\ \infty, E_2) + \lambda\,, \tag{7*}$$

gdzie $G(z;\ \infty, E_2)$ oznacza funkcję Greena dla obszaru $D_\infty(E_2)$ z biegunem w punkcie $z = \infty$. Wzór (7) przyjmuje postać

$$\log\left[\frac{v(E;\ \lambda f)}{d(E)}\right]^{1/\lambda} = -1 - \mu_{\lambda f}(E_2)\,,$$

gdyż $d(E_2) = d(E)$, $E^\lambda = E_1 + E_2^\lambda = E$.

W obu przypadkach (7) i (7*) otrzymujemy wzór

$$\lim_{\lambda\to 0}\log\left[\frac{v(E;\ \lambda f)}{d(E^\lambda)}\right] = -2\,.$$

Wynik powyższy można przedstawić w postaci (6).

Niech teraz E będzie wspólnym brzegiem obszaru nieograniczonego D_∞ i obszaru ograniczonego D, zaś $f(z)$ funkcją ciągłą określoną na zbiorze E. Wobec (3) i własności funkcji ekstremalnej $\Phi(z;\ \lambda f, E)$ mamy wzór następujący:

$$\frac{1}{\lambda}\log\Phi(z;\ \lambda f, E) \equiv \frac{1}{\lambda} G(z;\ \infty, E^\lambda) + u(z;\ E^\lambda)\,,$$

gdzie E^λ oznacza zbiór pokryty przez masę przy rozkładzie $\mu_{\lambda f}$, a $u(z;\ E^\lambda)$ jest rozwiązaniem problemu Dirichleta z obłożeniem $f(z)$ dla obszaru, którego brzegiem jest zbiór E^λ. Jeżeli $E^\lambda = E$, to dla $z \in D$ przyjmijmy $G(z;\ \infty, E^\lambda) \equiv 0$, zaś przez $u(z;\ E^\lambda)$ rozwiązanie problemu Dirichleta z obłożeniem $f(z)$ dla obszaru D względnie D_∞ zależnie od tego czy $z \in D$, czy $z \in D_\infty$.

Używając poprzednich oznaczeń otrzymujemy następujące twierdzenie: Jeżeli $E^\lambda = E$, to

$$\log\left[\frac{v(E;\ \lambda f)}{d(E)}\right]^{1/\lambda} = -u(\infty;\ E) - \int\limits_E f(\zeta)\,d\mu_{\lambda f}(\zeta).$$

Zatem, gdy $\lambda \to 0$

$$\lim_{\lambda\to 0}\log\left[\frac{\delta(E;\ \lambda f)}{d(E)}\right]^{1/\lambda} = \int\limits_E f(\zeta)\,d\mu_0(\zeta) - u(\infty;\ E)\,. \tag{8}$$

Jeżeli $E^\lambda \neq E$ przy każdym $\lambda \neq 0$, to

$$\log\left[\frac{v(E;\ \lambda f)}{d(E^\lambda)}\right]^{1/\lambda} = -u(\infty;\ E^\lambda) - \int\limits_E f(\zeta)\,d\mu_{\lambda f}(\zeta)\,.$$

Wiadomo (por. [6], str. 25), że gdy $\lambda \to 0$, $E^\lambda \to E$, zatem z poprzedniego wzoru otrzymujemy (8).

Katedra Funkcji Analitycznych
Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków

Otrzymano 15. X. 1958 r.

SUMMARY

Limits of a Certain Functional Connected with the Capacity of a Plane Set

Let $E = E_1 + E_2$ be the boundary of a doubly connected plane domain D, λ a positive parameter and $f(z) = \begin{cases} 0, & \text{when } z \in E_1, \\ 1, & z \in E_2. \end{cases}$

Using the definition of the generalised capacity and the extremal points method of F. Leja [1] we prove in this note the existence of some limit, see formula (6).

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Leja, *Teoria funkcji analitycznych*, Warszawa 1957, PWN, str. 558.
[2] J. Górski, *Sur certaines propriétés de points extrémaux liés à un domaine plan*, Ann. Pol. Math. III, 1 (1956), str. 32–36.
[3] G. M. Golusin, *Geometriczeskaja tieoria kompleksnowo pieremiennowo*, Moskwa 1952, str. 540.
[4] F. Leja, *Une méthode élémentaire de resolution du problème de Dirichlet dans le plan*, Ann. de la Soc. Pol. de Math., 23, 1950, str. 230–245.
[5] M. Fekete, J. L. Walsh, *On the asymptotic behavior of polynomials with extremal properties out of their zeros*, Journ. Analyse Math. 4 1955, str. 49–87.
[6] F. Leja, *Polynomes extrémaux et la représentation conforme des domaines doublement connexes*, Ann. Pol. Math. I, 1, 1954, 13–28.