ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

Nr 22 PRACE MATEMATYCZNE ZESZYT 5 1959

Władysław Bach

O asymptotycznym zachowaniu się funkcji harmonicznych w ćwierćpłaszczyźnie

On the Asymptotic Behaviour of Harmonic Functions in the Quarter-Plane

Niech $u(x, y)$ będzie funkcją ciągłą w ćwierćpłaszczyźnie $\overline{T}: \{x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ i harmoniczną wewnątrz $\overline{T}$, tj. w zbiorze $T: \{x > 0, y > 0\}$. Funkcja ta nie jest wyznaczona jednoznacznie poprzez wartości na brzegu T, bo np. funkcje $u(x, y)$ i $u(x, y)+xy$ są różne chociaż posiadają te same wartości na brzegu. Jeżeli jednak $u(x, y)$ jest funkcją harmoniczną w półpłaszczyźnie $y > 0$, oraz dla dostatecznie dużych $r = \sqrt{x^2+y^2}$ $(-\infty < x < \infty, y > 0)$ spełniona jest nierówność $|u(x, y)| \leqslant M(|x|^a + |y|^a)$, gdzie M i $a < 1$ są liczbami dodatnimi zależnymi tylko od $u(x, y)$, wówczas jest ona wyznaczona jednoznacznie poprzez wartości na brzegu [1] [1]).

Będziemy pisać $(x, y) \underset{L}{\to} (x_0, y_0)$ na oznaczenie, że punkt (x, y) zmierza do punktu (x_0, y_0) po krzywej L (nie wykluczamy przypadku $x_0 = \infty$ lub $y_0 = \infty$ lub $x_0 = y_0 = \infty$). Gdy punkt (x, y) oddala się do nieskończoności będziemy to zapisywać $(x, y) \to \infty$ (tutaj może np. $x \to -\infty$).

Niech $u(x, y)$ będzie funkcją harmoniczną w T, ciągłą i ograniczoną w $\overline{T}$ i niech

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{y\to\infty} u(0, y) = g_1 \\ &\lim_{x\to\infty} u(x, 0) = g_2 . \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Udowodnimy

Twierdzenie 1°. *Jeżeli* $(x, y) \underset{(y=ax+b)}{\longrightarrow} \infty$, *gdzie* $a > 0$, b *dowolne* [2]), *wówczas* $u(x, y) \to \dfrac{g_1+g_2}{2} + \dfrac{g_1-g_2}{2} \cdot \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{a^2-1}{2a}$ *niezależnie od* b.

---

[1]) Dowód podany w [1] trzeba tylko w prosty sposób zmodyfikować.

[2]) Chodzi o to, żeby półprosta leżała w T. Rozważamy tutaj punkty prostej $y = ax + b$ zawarte w T.

2° *Jeżeli* $(x, y) \underset{x=c}{\to} (c, \infty)$, *względnie* $(x, y) \underset{y=c}{\to} (\infty, c)$, $(c > 0)$, *wówczas* $u(x, y) \to g_1$, *względnie* $u(x, y) \to g_2$.

Odwzorujmy najpierw ćwiartkę $\overline{T}: \{x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ na półpłaszczyznę $\overline{y} > 0$ płaszczyzny $(\overline{x}, \overline{y})$ poprzez

$$(2) \qquad \begin{cases} \overline{x} = x^2 - y^2 \\ \overline{y} = 2xy\,. \end{cases}$$

Odwzorowanie to jest jednokrotne i ciągłe, oraz konforemne jeśli chodzi o punkty wewnętrzne, bo jest to inaczej zapisane odwzorowanie $w = z^2$, gdzie $w = \overline{x} + i\overline{y}$, $z = x + iy$. Ostatnie zaś odwzorowanie jest konforemne w ćwiartce $T: \{x > 0, y > 0\}$, bo tam pochodna $w' = 2z \neq 0$ [1]).

Poprzez (2) półoś $x \geqslant 0, y = 0$ przechodzi w półoś $\overline{x} \geqslant 0, \overline{y} = 0$, a półoś $x = 0, y \geqslant 0$ na półoś $\overline{x} \leqslant 0, \overline{y} = 0$. Proste $y = ax + b$ $(a > 0$, b dowolne) lub w postaci parametrycznej $x = t, y = at + b$, $-\infty < t < \infty$ przechodzą w krzywe

$$(3) \qquad \begin{cases} \overline{x} = t^2 - (at+b)^2 = (1-a^2)t^2 - 2abt - b^2 \\ \overline{y} = 2at^2 + 2bt\,, \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty)\,.$$

Proste zaś $x = c (c > 0)$, względnie $y = c (c > 0)$ przejdą w krzywe

$$(3') \qquad \begin{cases} \overline{x} = c^2 - t^2 \\ \overline{y} = 2ct \end{cases} \qquad -\infty < t < \infty\,,$$

względnie

$$(3'') \qquad \begin{cases} \overline{x} = t^2 - c^2 \\ \overline{y} = 2ct\,, \end{cases}$$

bo np. punkt (c, y) leżący na prostej $x = c$ przejdzie w punkt $(\overline{x}, \overline{y})$ gdzie $\overline{x} = c^2 - y^2$, $\overline{y} = 2cy$. Oprócz tego $(\overline{x}, \overline{y}) \underset{\overline{y}=0}{\to} (\infty, 0)$ względnie $(\overline{x}, \overline{y}) \underset{\overline{y}=0}{\to} (-\infty, 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x, y) \underset{\overline{y}=0}{\to} (\infty, 0)$, względnie $(x, y) \underset{\overline{y}=0}{\to} (0, \infty)$.

Niech $u_1(\overline{x}, \overline{y}) = u\big(\varphi(\overline{x}, \overline{y}), \psi(\overline{x}, \overline{y})\big)$, gdzie

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \varphi(\overline{x}, \overline{y}) \\ y = \psi(\overline{x}, \overline{y}) \end{cases}$$

jest odwzorowaniem odwrotnym do (2). Funkcja $u_1(\overline{x}, \overline{y})$ jest harmoniczna w półpłaszczyźnie $(\overline{y} > 0)$ oraz ciągła i ograniczona w półpłasz-

---

[1]) Ciągłość odwzorowania jest widoczna. Aby zbadać jednokrotność w $\overline{T}$ wystarczy wskutek ciągłości w $\overline{T}$ i konforemności w T zbadać jednokrotność na brzegu (brzeg przechodzi w brzeg). Na brzegu zaś zawsze albo $x = 0$, albo $y = 0$, a więc zawsze albo $\overline{x} = -y^2$, $\overline{y} = 0$ albo $\overline{x} = x^2$, $\overline{y} = 0$. Stąd widać, że punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) są identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie obrazy $(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ i $(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$ są identyczne.

czyźnie ($\bar{y} \geqslant 0$) (wraz z osią x-ów). Na brzegu obszaru tj. na osi x-ów, przyjmuje wartości $u_1(\bar{x}, 0) = u\big(\varphi(\bar{x}, 0), \psi(\bar{x}, 0)\big) = \varphi_1(\bar{x})$ $\varphi_1(\bar{x})$ jest ciągła na osi $\bar{x}$-ów, bo $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ i $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ są ciągłe w półpłaszczyźnie ($\bar{y} \geqslant 0$), gdyż (4) jest odwzorowaniem odwrotnym do (2), które jest ciągłe i jednokrotne.

Ponieważ $\varphi(\bar{x}, 0) = x > 0$, $\psi(\bar{x}, 0) = 0$ dla $\bar{x} > 0$ oraz $\varphi(\bar{x}, 0) = 0$, $\psi(\bar{x}, 0) = y > 0$ dla $\bar{x} < 0$ (półosie przechodzą w odpowiednie półosie), więc

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \varphi_1(\bar{x}) = g_1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \varphi_1(\bar{x}) = g_2 \,. \end{cases} \tag{5}$$

Ponieważ $u_1(\bar{x}, \bar{y})$ jest ograniczona w półpłaszczyźnie ($\bar{y} > 0$), więc z jednoznaczności rozwiązania problemu Dirichleta przy obłożeniu $\varphi_1(\bar{x})$ na osi x-ów wynika, że

$$u_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{y}\varphi_1(\xi)\, d\xi}{(\bar{x} - \xi)^2 + (\bar{y})^2} \,.$$

Twierdzenie będzie udowodnione jeżeli: 1° udowodnimy, że

$$u_1(\bar{x}, \bar{y}) \to \frac{g_1 + g_2}{2} + \frac{g_1 - g_2}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a^2 - 1}{2a}$$

gdy $(\bar{x}, \bar{y}) \underset{(3)}{\to} \infty$ oraz 2° $u_1(\bar{x}, \bar{y}) \to g_1$ względnie $u_1(\bar{x}, \bar{y}) \to g_2$ gdy $(\bar{x}, \bar{y}) \underset{(3')}{\to} \infty$, względnie $(\bar{x}, \bar{y}) \underset{(3'')}{\to} \infty$.

W dalszym ciągu będziemy pisać (x, y) zamiast $(\bar{x}, \bar{y})$.

D o w ó d 1°. Z (5) wynika, że dla $\varepsilon > 0$ istnieje takie $R > 0$, że $g_1 - \varepsilon \leqslant \varphi_1(x) \leqslant g_1 + \varepsilon$ dla $x \leqslant -R$ oraz $g_2 - \varepsilon \leqslant \varphi_1(x) \leqslant g_2 + \varepsilon$ dla $x \geqslant R$. Mamy również

$$u_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-R} \frac{y\varphi_1(\xi)\, d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2} + \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{R} \ldots + \frac{1}{\pi} \int_{R}^{\infty} \ldots$$

Oznaczmy pierwszą całkę przez I_1, trzecią przez I_2 i drugą przez I_3. Jeżeli $(x, y) \to \infty$, wówczas $I_3 \to 0$, bo

$$\left| \int_{-R}^{R} \frac{y\varphi_1(\xi)\, d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2} \right| \leqslant M \int_{-R}^{R} \frac{y\, d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2} < \frac{M}{y} 2R \to 0 \,,$$

gdy $y \to \infty$ [1]) (M oznacza taką stałą, że $|\varphi_1| \leqslant M$). Dla całek I_1 i I_2 mamy nierówności

$$\frac{g_1-\varepsilon}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-R}\frac{y\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2} \leqslant I_1 \leqslant \frac{g_1+\varepsilon}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-R}\frac{y\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}$$

$$\frac{g_2-\varepsilon}{\pi}\int\limits_{R}^{\infty}\frac{y\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2} \leqslant I_2 \leqslant \frac{g_2+\varepsilon}{\pi}\int\limits_{R}^{\infty}\frac{y\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}$$

ale

$$\int\limits_{-\infty}^{-R}\frac{y\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2} = \int\limits_{-\infty}^{-R}\frac{d\left(\frac{\xi}{y}\right)}{\left(\frac{x-\xi}{y}\right)^2+1} = \int\limits_{-\infty}^{-R}\frac{d\left(\frac{\xi-x}{y}\right)}{1+\left(\frac{\xi-x}{y}\right)^2} =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\xi-x}{y}\right)\Bigg|_{-\infty}^{-R} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-R-x}{y}\right)+\frac{\pi}{2}$$

oraz

$$\int\limits_{R}^{\infty}\frac{y\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\xi-x}{y}\right)\Bigg|_{R}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{R-x}{y},$$

a zatem

$$\frac{g_1-\varepsilon}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{-R-x}{y}\right) \leqslant I_1 \leqslant \frac{g_1+\varepsilon}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{-R-x}{y}\right)$$

oraz

$$\frac{g_2-\varepsilon}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{R-x}{y}\right) \leqslant I_2 \leqslant \frac{g_2+\varepsilon}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{R-x}{y}\right)$$

Jeżeli $(x,y)\underset{(3)}{\to}\infty$ wówczas

$$\lim\frac{-R-x}{y} = \lim\frac{R-x}{y} = \lim_{t\to\infty}\frac{\pm R+(a^2-1)t^2+2abt+b^2}{2at^2+2bt} = \frac{a^2-1}{2a},$$

a więc dodając ostatnie nierówności i przechodząc z punktem (x,y) do nieskończoności wzdłuż (3) otrzymamy

$$\frac{g_1-\varepsilon}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{a^2-1}{2a}\right)+\frac{g_2-\varepsilon}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{a^2-1}{2a}\right) \leqslant \liminf_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3)}}(I_1+I_2) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3)}}(I_1+I_2) \leqslant \frac{g_1+\varepsilon}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{a^2-1}{2a}\right)+\frac{g_2+\varepsilon}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{a^2-1}{2a}\right),$$

[1]) Z (3) wynika, że punkt (x, y) oddala się do nieskończoności wtedy i tylko wtedy, gdy $t\to\infty$, bo $a>0$, a wtedy na podstawie (3) zawsze $y\to\infty$.

czyli

$$\left(\frac{g_1+g_2}{2}+\frac{g_1-g_2}{2}\,\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{a^2-1}{2a}\right)-\varepsilon\leqslant\liminf_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3)}}(I_1+I_2)\leqslant$$

$$\leqslant\limsup_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3)}}(I_1+I_2)\leqslant\left(\frac{g_1+g_2}{2}+\frac{g_1-g_2}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{a^2-1}{2a}\right)+\varepsilon\,.$$

Takie same nierówności będziemy mieć, gdy zamiast I_1+I_2 weźmiemy $I_1+I_2+I_3$, bo $I_3\to 0$, gdy $(x,y)\underset{(3)}{\to}\infty$. Ponieważ

$$\liminf_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3)}}(I_1+I_2+I_3)=\liminf_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3)}}\left(\int_{-\infty}^{-R}+\int_{-R}^{R}+\int_{R}^{\infty}\right)=\lim_{R\to\infty}\{\liminf_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3)}}(I_1+I_2+I_3)\}$$

i podobnie

$$\limsup_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3)}}(I_1+I_2+I_3)=\lim_{R\to\infty}\{\limsup_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3)}}(I_1+I_2+I_3)\}$$

oraz ponieważ możemy zmierzać z ε do zera, gdy $R\to\infty$, więc stąd wynika, że

$$\liminf_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3)}}(I_1+I_2+I_3)=\limsup_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3)}}(I_1+I_2+I_3)=\frac{g_1+g_2}{2}+\frac{g_1-g_2}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{a^2-1}{2a}$$

i pierwsza część twierdzenia została udowodniona.

D o w ó d 2°. Jeżeli $(x,y)\underset{(3')}{\to}\infty$, czyli $(x,y)\to\infty$ wzdłuż krzywej (3′), wówczas $\lim\frac{x}{y}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{c^2-t^2}{2ct}=-\infty$, więc

$$\int_{-\infty}^{-R}\frac{y\,d\xi}{(\xi-x)^2+y^2}=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{-R-x}{y}\to\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\,,\qquad\text{gdy}\qquad(x,y)\underset{(3')}{\to}\infty$$

zaś

$$\int_{R}^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{R-x}{y}\to\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0\,,$$

gdy $(x,y)\underset{(3')}{\to}\infty$ i podobnie jak poprzednio $\int\limits_{-R}^{R}\frac{y\varphi_1(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}\to 0$, gdy $(x,y)\underset{(3')}{\to}\infty$. Zatem (zachowując poprzednie oznaczenia) $I_2\to 0$, $I_3\to 0$, gdy $(x,y)\underset{(3')}{\to}\infty$, oraz

$$g_1-\varepsilon\leqslant\liminf_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3')}}I_1\leqslant\limsup_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3')}}I_2\leqslant g_1+\varepsilon\ ^{1)}$$

[1]) Gdyż dla $\varepsilon>0$ istnieje $R>0$ takie, że

$$\frac{g_1-\varepsilon}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{-R-x}{y}\right)\leqslant I_2\leqslant\frac{g_1+\varepsilon}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{-R-x}{y}\right).$$

a więc
$$g_1-\varepsilon \leqslant \liminf_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3')}}(I_1+I_2+I_3) \leqslant \limsup_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3')}}(I_1+I_2+I_3) \leqslant g_1+\varepsilon$$

i wobec tego podobnie jak w 1° wynika stąd, że
$$\lim_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3')}} u_1(x, y) = \liminf_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3')}}(I_1+I_2+I_3) = g_1 .$$

Zupełnie podobnie można udowodnić, że jeżeli $(x, y)\underset{(3'')}{\to}\infty$, wówczas $u_1(x, y)\to g_2$. Twierdzenie jest zatem udowodnione.

Uwaga 1. Wróćmy do funkcji $u(x, y)$. Jeżeli $|u(x, y)| \leqslant M$ dla $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ oraz $u(0, y)\to g_1$, gdy $y\to\infty$, lecz nie istnieje granica $u(x, 0)$, gdy $x\to\infty$ (np. gdy $u(x, y)$ jest taka, że $u(0, y)=0$ i $u(x, 0)=\sin x$), wówczas również $u(c, y)-g_1$, gdy $y\to\infty$ $(c>0)$, bo wówczas rozumując podobnie jak w dowodzie drugiej części twierdzenia udowodnimy, że gdy $(x, y)\underset{(3')}{\to}\infty$, wówczas
$$I_2\to 0 \text{ i } I_3\to 0 \text{ oraz } g_1-\varepsilon \leqslant \liminf_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3')}} I_1 \leqslant \limsup_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3')}} I_1 \leqslant g_1+\varepsilon .$$

Uwaga 2. W przypadku gdy w całce $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y\varphi_1(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}$ funkcja $\varphi_1(\xi)$ jest całkowalna w każdym przedziale skończonym i taka, że $\varphi_1(x)\to g_1$, gdy $x\to-\infty$ oraz dla dostatecznie dużych x-ów dodatnich istnieją stałe $K\geqslant 0$ i $0\leqslant a<\frac{1}{2}$ takie, że $|\varphi_1(x)|\leqslant Kx^a$ [1]) (a więc $\varphi_1(x)$ nie musi być ograniczona na całej osi x-ów), wówczas
$$\lim_{\substack{(x,y)\to\infty\\(3')}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y\varphi_1(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}=g_1 .$$

Wynika to stąd, że podobnie jak w dowodzie drugiej części twierdzenia $I_3\to 0$, gdy $(x, y)\underset{(3')}{\to}\infty$, dla I_1 mamy podobne oszacowania, zaś
$$|I_2|=\left|\int\limits_R^{\infty}\frac{y\varphi_1(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}\right|\leqslant K\int\limits_R^{\infty}\frac{y\xi^a d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}\leqslant\int\limits_R^{\infty}\frac{y\xi^a d\xi}{(\xi-x)^2}$$

Ponieważ $(x, y)\underset{(3')}{\to}\infty$, czyli dla t dostatecznie dużego x jest ujemne, więc dla takich x-ów ostatnią całkę można oszacować przez
$$\int\limits_R^{\infty}\frac{y\,d\xi}{(\xi-x)^{2-a}}=-\frac{1}{2-a}\,\frac{y}{(\xi-x)^{1-a}}\Bigg|_{\xi=R}^{\xi=a}=\frac{1}{2-a}\,\frac{y}{(R-x)^a}=$$
$$=\frac{1}{2-a}\,\frac{2ct}{(R-c^2+t^2)^a}\to 0 ,$$

[1]) Czyli dla dostatecznie dużych x funkcja spełnia warunek Lipschitza.

gdy $t \to \infty$, bo $a < \frac{1}{2}$. Zatem

$$\lim \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} = g_1, \quad \text{gdy} \quad (x, y) \underset{(3')}{\to} \infty .$$

Uwaga 3. Widać, że twierdzenie będzie prawdziwe, gdy $(x, y) \to \infty$ niekoniecznie po prostej $y = ax + b$, lecz po krzywej, której asymptotą jest prosta $y = ax + b$.

Katedra Funkcji Analitycznych
Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków
Otrzymano 21. 11. 1958 r.

SUMMARY

On the Asymptotic Behaviour of Harmonic Functions in the Quarter-Plane

Let $u(x, y)$ be a harmonic and bounded function in the set $x > 0$, $y > 0$ and continuous in the set $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

The author examines the behaviour of $u(x, y)$, when (x, y) tends to infinity along any straight line and if it is known the behaviour of $u(x, y)$ when the point (x, y) tends to infinity along half-axes $x = 0$, $y \geqslant 0$ and $x \geqslant 0$, $y = 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Krzyżański, *O rozwiązaniu zagadnienia Dirichleta w półprzestrzeni*, Zesz. Nauk. U. J. Dz. Mat.-Fiz.-Chem., **14**, 41 (1957).