ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
Nr 22 PRACE MATEMATYCZNE ZESZYT 5 1959

Józef Siciak

O monotoniczności funkcji ekstremalnej Leji $\Phi^{1/\lambda}(z, E, f_\lambda)$ względem parametru λ

On the Monotonity of Leja's Extremal Function $\Phi^{1/\lambda}(z, E, f_\lambda)$ in Relation to Parameter λ

Niech E będzie zbiorem domkniętym i ograniczonym o pojemności logarytmicznej $c(E) > 0$, $g(z)$ i $h(z)$ – funkcjami rzeczywistymi, określonymi i ograniczonymi (ciągłymi lub nie) na zbiorze E, λ – dowolną liczbą rzeczywistą $\geqslant 0$. Przyjmijmy $f_\lambda(z) = g(z) + \lambda h(z)$. Niech $z^{(n)} = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ będzie dowolnym układem $n+1$ różnych punktów zbioru E. Przyjmijmy

$$\Phi^{(j)}(z, z^{(n)}, f_\lambda) = \left(\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{z - z_k}{z_j - z_k}\right) e^{n f_\lambda(z_j)}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n; \tag{1}$$

$$\Phi_n(z, E, f_\lambda) = \inf_{z^{(n)} \subset E} \{\max_{(j)} |\Phi^{(j)}(z, z^{(n)}, f_\lambda)|\}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Wiadomo [1], że w płaszczyźnie zespolonej otwartej istnieje granica skończona

$$\Phi(z, E, f_\lambda) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Phi_n(z, E, f_\lambda)}\,. \tag{3}$$

Celem tej noty jest udowodnić, że:

Jeśli $g(z) \geqslant 0$ *dla* $z \in E$ *i* $0 < \lambda' \leqslant \lambda$, *to dla dowolnego* z

$$\Phi^{1/\lambda}(z, E, f_\lambda) \leqslant \Phi^{1/\lambda'}(z, E, f_{\lambda'})\,. \tag{4}$$

Dowód. 1° Załóżmy początkowo, że liczby λ i λ' są wymierne,

$$\lambda' = \frac{p'}{q'} \leqslant \frac{p}{q} = \lambda\,, \tag{5}$$

gdzie liczby p, q, p', q' są naturalne. Oznaczmy przez $x^{(n)} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ układ $n+1$ takich punktów zbioru E, że

$$\prod_{0\leqslant i<k\leqslant n} e^{\frac{|x_i-x_k|}{f_\lambda(x_i)+f_\lambda(x_k)}} \geqslant \tfrac{1}{2} \sup_{z^{(n)}\subset E} \prod_{0\leqslant i<k\leqslant n} e^{\frac{|z_i-z_k|}{f_\lambda(z_i)+f_\lambda(z_k)}}.$$

Z nierówności tej wynika, że dla dowolnego $z \in E$

$$(6) \qquad |\Phi^{(j)}(z, x^{(n)}, f_\lambda)| \leqslant 2e^{nf_\lambda(z)}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Niech $z^{(nq'p)} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{nq'p}\}$ będzie dowolnym układem $nq'p+1$ różnych punktów zbioru E. Uwzględniając (1) i (5) otrzymamy na mocy wzoru interpolacyjnego Lagrange'a tożsamość

$$[\Phi^{(j)}(z, x^{(n)}, f_\lambda)]^{p'q} = \sum_{k=0}^{nq'p} [\Phi^{(j)}(z_k, x^{(n)}, f_\lambda)]^{p'q} L^{(k)}(z, z^{(nq'p)}), \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

gdzie $L^{(k)}(z, z^{(nq'p)}) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{nq'p} \frac{z-z_i}{z_k-z_i}$, z której wynika dzięki (6) nierówność

$$(7) \qquad |\Phi^{(j)}(z, x^{(n)}, f_\lambda)|^{p'q} \leqslant 2^{p'q} \sum_{k=0}^{nq'p} e^{np'qf_\lambda(z_k)} |L^{(k)}(z, z^{(nq'p)})|, \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Ponieważ $\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{p'q}{q'p} \leqslant 1$ i $g(z) \geqslant 0$, więc $p'qg(z) \leqslant q'pg(z)$. Zatem

$$np'qf_\lambda(z_k) = np'q\left[g(z_k) + \frac{p}{q}\,h(z_k)\right] \leqslant nq'p\left[g(z_k) + \frac{p'}{q'}\,h(z_k)\right] =$$
$$= nq'pf_{\lambda'}(z_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, nq'p,$$

skąd na podstawie (7)

$$|\Phi^{(j)}(z, x^{(n)}, f_\lambda)|^{p'q} \leqslant 2^{p'q}(nq'p+1) \max_{(k)} |\Phi^{(k)}(z, z^{(nq'p)}, f_{\lambda'})|, \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Biorąc teraz pod uwagę, że $\Phi_n(z, E, f_\lambda) \leqslant \max_{(j)} |\Phi^{(j)}(z, x^{(n)}, f_\lambda)|$ oraz, że układ $z^{(nq'p)}$ jest dowolny, otrzymamy nierówność

$$\Phi_n^{p'q}(z, E, f_\lambda) \leqslant 2^{p'q}(nq'p+1)\Phi_{nq'p}(z, E, f_{\lambda'}), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Wyciągnijmy z obu stron tej nierówności pierwiastek stopnia $np'p$. W granicy, gdy $n\to\infty$, przechodzi ona wtedy w nierówność (4).

2°. Udowodnimy teraz nierówność (4) bez założenia, że liczby λ' i λ są wymierne. Dobierzmy w tym celu dwa ciągi liczb wymiernych $\{\mu_n\}$ i $\{\nu_k\}$ zbieżne odpowiednio do λ' i λ, z których pierwszy jest rosnący, a drugi malejący,

$$\mu_n \leqslant \lambda' \leqslant \lambda \leqslant \nu_k, \qquad n, k = 1, 2, \ldots \quad \text{oraz} \quad \mu_n \uparrow \lambda' \quad \text{i} \quad \nu_k \downarrow \lambda.$$

Załóżmy chwilowo, że $h(z) \geqslant 0$ dla $z \in E$. Wtedy zachodzą nierówności

$$f_{\mu_n}(z) \leqslant f_{\lambda'}(z) \leqslant f_\lambda(z) \leqslant f_{\nu_k}(z)\,, \qquad z \in E\,, \qquad n, k = 1, 2, \ldots,$$

z których dzięki (1), (2) i (3) wynika, że

$$\Phi(z, E, f_{\mu_n}) \leqslant \Phi(z, E, f_{\lambda'}) \leqslant \Phi(z, E, f_\lambda) \leqslant \Phi(z, E, f_{\nu_k})\,, \tag{8}$$

gdzie z jest dowolną liczbą zespoloną i $n, k = 1, 2, \ldots$ Ponieważ μ_n i ν_k są wymierne oraz $\mu_n \leqslant \nu_k$ dla $n, k = 1, 2, \ldots$, więc zgodnie z 1° mamy

$$\Phi^{1/\nu_k}(z, E, f_{\nu_k}) \leqslant \Phi^{1/\mu_n}(z, E, f_{\mu_n})\,, \qquad n, k = 1, 2, \ldots,$$

skąd dzięki (8) wnioskujemy, że

$$\Phi^{1/\nu_k}(z, E, f_\lambda) \leqslant \Phi^{1/\nu_k}(z, E, f_{\nu_k}) \leqslant \Phi^{1/\mu_n}(z, E, f_{\mu_n}) \leqslant \Phi^{1/\mu_n}(z, E, f_{\lambda'}) \qquad n, k = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Jeśli $n, k \to \infty$, to w granicy nierówności te dają (4).

Uwolnimy się teraz od założenia, że $h(z)$ jest funkcją nieujemną. W tym celu zauważmy, że istnieje taka liczba dodatnia c, że funkcja $h^*(z) = h(z) + c \geqslant 0$ dla $z \in E$, bo funkcja h jest ograniczona. Niech $f_\lambda^*(z) = f_\lambda(z) + \lambda c$. Oczywiście

$$\Phi^{1/\lambda}(z, E, f_\lambda^*) \leqslant \Phi^{1/\lambda'}(z, E, f_{\lambda'}^*)\,, \qquad \text{gdy} \quad 0 < \lambda' \leqslant \lambda\,. \tag{10}$$

Ale z definicji funkcji Φ wynika, że $\Phi(z, E, f_\lambda^*) = e^{\lambda c}\Phi(z, E, f_\lambda)$. Zatem nierówność (10) jest równoważna nierówności (4), *cbdo.*

Uwaga. Dowodzi się [2], że funkcja

$$u_\lambda(z, E, h) = \frac{1}{\lambda}\log\frac{\Phi(z, E, f_\lambda)}{\Phi(z, E, f_0)}\,, \qquad \text{gdzie} \qquad f_\lambda(z) = \lambda h(z)$$

jest harmoniczna w składowej $D(E)$ dopełnienia CE, zawierającej punkt ∞ w swoim wnętrzu, oraz że rodzina funkcji $\{u_\lambda(z, E, h)\}$, gdzie $\lambda > 0$, jest wspólnie ograniczona na całej płaszczyźnie, przy czym

$$u_\lambda(z, E, h) \leqslant h(z)\,, \qquad \text{dla} \quad z \in E\,.$$

Z udowodnionej powyżej nierówności (4) oraz z twierdzenia Harnacka wynika, że na całej płaszczyźnie domkniętej istnieje granica

$$u(z, E, h) = \lim_{\lambda \to 0} u_\lambda(z, E, h)\,.$$

Granica ta jest w obszarze $D(E)$ funkcją harmoniczną.

Można udowodnić, że: 1° *Jeżeli $h(z)$ jest funkcją ciągłą, to $u(z, E, h)$ jest uogólnionym w sensie Kelloga-Wienera rozwiązaniem problemu Dirichleta dla $D(E)$ z obłożeniem $h(z)$.*

2° *Jeżeli brzeg obszaru $D(E)$ składa się z samych punktów regularnych ze względu na problem Dirichleta, to funkcja $u(z, E, h)$ przedstawia jedno z uogólnionych w sensie Perrona rozwiązań problemu Dirichleta dla $D(E)$ z obłożeniem $h(z)$ (gdzie h jest dowolną funkcją ograniczoną).*

Katedra Funkcji Analitycznych
Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków

Otrzymano 21. 11. 1958 r.

SUMMARY

On the Monotonity of Leja's Extremal Function $\Phi^{1/\lambda}(z, E, f_\lambda)$ in Relation to Parameter λ

The aim of the notice is to give a quite elemantary proof of the inequality (4), which is very useful when we want to give the Kellog-Wiener or Perron solution of the Dirichlet problem by Leja method of the extremal points.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Leja, *Une méthode élémentaire de résolution du probleme de Dirichlet dans le plan*, Ann. de la Soc. Pol. de Math. 23 (1950), 230—245.

[2] F. Leja, *Propriétés des points extrémaux des ensembles plans et leur application à la représentation conforme*, Ann. Pol. Math. III_2 (1957), 319—342.