

Andrzej Lasota

O związku między problemami początkowymi i brzegowymi dla równania różniczkowego zwyczajnego n -tego rzędu

A Note on the Relationship between the Initial and the Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equation of the n -th Order

Dla uproszczenia rozważań będziemy zakładali, że prawa strona równania

$$(1) \quad y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

to znaczy funkcja $f(x, y_0, \dots, y_{n-1})$ jest określona i ciągła w pasie nieskończonym

$$(2) \quad a \leq x \leq b; \quad y_0, \dots, y_{n-1} \quad \text{dowolne.}$$

Wiadomo, że jeśli funkcja $f(x, \dots, y_{n-1})$ jest odpowiednio regularna, na przykład posiada pochodne cząstkowe ciągle względem zmiennych y_0, \dots, y_{n-1} lub spełnia względem tych zmiennych warunki Lipschitza, wówczas równanie (1) posiada dokładnie jedno rozwiązanie spełniające warunki początkowe

$$(3) \quad y^{(i)}(a_0) = \gamma_i \quad i = 0, \dots, n-1 \quad a \leq a_0 \leq b.$$

Rozwiązanie to daje się przedłużyć na cały przedział $[a, b]$, jeżeli funkcja $f(x, \dots, y_{n-1})$ spełnia warunek

$$(4) \quad |f(x, y_0, \dots, y_{n-1})| \leq K + L \sum_{i=0}^{n-1} |y_i| \quad [4].$$

Wiadomo również, że problem brzegowy dla równania (1), to jest problem polegający na poszukiwaniu rozwiązania spełniającego warunki brzegowe

$$(5) \quad y(\alpha_i) = \beta_i \quad i = 1, \dots, n \quad a \leq \alpha_i \leq b \quad \alpha_i \neq \alpha_j \quad \text{dla} \quad i \neq j$$

nawet przy bardzo wysokiej regularności funkcji $f(x, \dots, y_{n-1})$ i przy założeniu (4) może nie posiadać rozwiązań. Jako przykład może tu służyć równanie

$$y'' = -y,$$

którego wszystkie rozwiązania dane są wzorem

$$y = C \sin x + D \cos x$$

i wśród których nie ma ani jednego spełniającego warunki

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1.$$

Warunki te bowiem dostarczają na stałe C i D sprzecznego układu równań

$$D = 0, \quad -D = 1.$$

Z drugiej jednak strony znane są twierdzenia gwarantujące istnienie w całym przedziale $[a, b]$ rozwiązań problemu brzegowego przy założeniu, że funkcja $f(x, \dots, y_{n-1})$ spełnia warunek (4) i że punkty a_1, \dots, a_n występujące w warunkach (5) leżą dość blisko siebie [1]. Wystarczy na przykład, ażeby

$$(6) \quad \max_{i,k=1,\dots,n} |a_i - a_k| < \min\left(1, \frac{1}{nL}\right).$$

Fakt istnienia rozwiązań problemu brzegowego przy założeniu (4), w wypadku gdy punkty a_1, \dots, a_n leżą dostatecznie blisko siebie oraz fakt, że problem początkowy jest przy tym założeniu również rozwiązalny w całym przedziale $[a, b]$ nasuwa myśl o związku między tymi problemami. Związek ten wyraża się między innymi w bliskości rozwiązań tych problemów w odpowiednich warunkach. Wyjaśni go przytoczone poniżej twierdzenie.

Zanim jednak przystąpimy do sformułowania odnośnego twierdzenia, przypomnimy definicję ilorazu różnicowego rzędu m oraz jego najprostsze własności [2]. Niech dana będzie w przedziale $[a, b]$ funkcja $g(x)$ taka, że

$$g(a_i) = \beta_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Ilorazem różnicowym rzędu m ($m < n$) funkcji $g(x)$ nazywamy wyrażenie

$$\begin{aligned} D^m[a_1, \dots, a_{m+1}; \beta_1, \dots, \beta_{m+1}] &= \\ &= m! \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{\beta_\nu}{(a_\nu - a_1) \dots (a_\nu - a_{\nu-1})(a_\nu - a_{\nu+1}) \dots (a_\nu - a_{m+1})} \end{aligned}$$

W szczególności

$$D^0[\alpha_1; \beta_1] = \beta_1.$$

Jeżeli funkcja $g(x)$ posiada w przedziale $[a, b]$ pochodną ciągłą aż do rzędu n włącznie, wówczas istnieją takie liczby ξ_m , że

$$(7) \quad D^m[\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}; \beta_1, \dots, \beta_{m+1}] = g^{(m)}(\xi_m) \\ \min_{i=1, \dots, m+1} \alpha_i \leq \xi_m \leq \max_{i=1, \dots, m+1} \alpha_i \quad m = 0, \dots, n-1.$$

Wynika stąd, że w tym przypadku

$$\lim_{\substack{\alpha_i \rightarrow \alpha_0 \\ i=1, \dots, m+1}} D^m[\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}; \beta_1, \dots, \beta_{m+1}] = g^{(m)}(\alpha_0) \quad m = 0, \dots, n-1.$$

Twierdzenie. Niech funkcja $f(x, y_0, \dots, y_{n-1})$ będzie ciągłą w paśmie (2) i spełnia w nim warunek (4).

Wtedy:

- 1°. Istnieje w przedziale $[a, b]$ co najmniej jedno rozwiązanie $\varphi_0(x)$ równania (1) spełniające warunki początkowe (3).
- 2°. Dla każdego układu punktów

$$A: (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$$

takich, że

$$(8) \quad |\alpha_i - \alpha_0| \leq \frac{h}{2}, \quad h < \min\left(1, \frac{1}{nL}\right)$$

istnieje w przedziale $[a, b]$ co najmniej jedno rozwiązanie $\varphi_A(x)$ równania (1) spełniające warunki brzegowe (5).

Jeżeli ponadto założymy, że rozwiązanie $\varphi_0(x)$ jest wyznaczone przez warunki początkowe (3) jednoznacznie oraz, że zmienne β_1, \dots, β_n zależą w ten sposób od ciągu zmiennych $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, że

$$\lim_{\substack{\alpha_i \rightarrow \alpha_0 \\ i=1, \dots, n}} D^m(\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}; \beta_1, \dots, \beta_{m+1}) = \gamma_m \quad m = 0, \dots, n-1,$$

wtedy także

- 3°. Rozwiązania $\varphi_A(x)$ zmierzają jednostajnie w przedziale $[a, b]$ wraz z pochodnymi aż do rzędu n włącznie do rozwiązania $\varphi_0(x)$.

Uwaga. Tezy powyższego twierdzenia zostały podane w trzech punktach. Dowody też wymienionych w punktach 1° i 2° są zawarte w cytowanych pracach. Dowód tezy zawartej w punkcie 3° podajemy poniżej.

Dowód. Ograniczymy się nie zaznaczając tego osobno do wartości $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zawartych w przedziale $\Delta_h \stackrel{df}{=} \left[\alpha_0 - \frac{h}{2}, \alpha_0 + \frac{h}{2} \right]$.

Ponieważ ilorazy

$$D_A^m \stackrel{df}{=} D^m(\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}; \beta_1, \dots, \beta_{m+1})$$

zmierzą przy $\alpha_k \rightarrow \alpha_0$ ($k = 1, \dots, n$) do wartości γ_m możemy więc założyć, że są one w przedziale Δ_h ograniczone (w razie potrzeby można h odpowiednio zmniejszyć). Mamy więc

$$(9) \quad |D_A^m| \leq M \quad m = 0, \dots, n-1.$$

Z własności (7) ilorazu różnicowego oraz z określenia całek $\varphi_A(x)$ wynika, że istnieją w przedziale

$$\Delta_A \stackrel{df}{=} \left[\min_{i=0, \dots, n} \alpha_i, \max_{i=0, \dots, n} \alpha_i \right]$$

liczby $\xi_{m,A}$ takie, że

$$(10) \quad D_A^m = \varphi_A^{(m)}(\xi_{m,A}) \quad m = 0, \dots, n-1.$$

Mamy więc

$$|\varphi_A^{(i)}(\alpha_0) - \gamma_i| \leq |\varphi_A^{(i)}(\alpha_0) - \varphi_A^{(i)}(\xi_{i,A})| + |D_A^i - \gamma_i|.$$

Stąd, uwzględniając, że liczby $\xi_{i,A}$ i α_0 należą do przedziału Δ_A zawartego w przedziale Δ_h , otrzymujemy na podstawie twierdzenia o wartości średniej nierówność

$$|\varphi_A^{(i)}(\alpha_0) - \gamma_i| \leq |\Delta_A| \max_{x \in \Delta_h} |\varphi_A^{(i)}(x)| + |D_A^i - \gamma_i|.$$

Z nierówności tej wynika natychmiast, że przy $\alpha_i \rightarrow \alpha_0$ ($i = 1, \dots, n$) $\varphi_A^{(m)}(\alpha_0) \rightarrow \gamma_m$ ($m = 0, \dots, n-1$), jeżeli tylko istnieje stała R (niezależna od A) taka, że

$$(11) \quad p_A^i \stackrel{df}{=} \max_{x \in \Delta_h} |\varphi_A^i(x)| \leq R.$$

Stąd zaś na podstawie twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązań równań różniczkowych od warunków początkowych wynika teza naszego twierdzenia [3]. Wystarczy zatem dla ukończenia dowodu dowieść istnienia stałej R .

Mamy oczywiście

$$|\varphi_A^{(i)}(x)| \leq |\varphi_A^{(i)}(\xi_{i,A})| + |\varphi_A^{(i)}(x) - \varphi_A^{(i)}(\xi_{i,A})|$$

stad po uwzględnieniu (9), (10) i (11) dla x z przedziału Δ_h otrzymujemy

$$|\varphi_A^{(i)}(x)| \leq M + hp_A^{i+1}$$

czyli

$$(12) \quad p_A^i \leq M + hp_A^{i+1} \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Z drugiej strony, ponieważ $\varphi_A(x)$ jest całką równania (1), więc na podstawie założenia (4) otrzymujemy

$$|\varphi_A^{(n)}(x)| \leq K + L \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_A^{(i)}(x)$$

skąd

$$(13) \quad p_A^n \leq K + L \sum_{i=0}^{n-1} p_A^i.$$

Z nierówności (12) i (13) oraz oszacowania (8) wartości h otrzymujemy po prostych rachunkach, że

$$p_A^i \leq R \frac{d^i}{i!} nM + \frac{K + nML}{l - nhL} \quad i = 0, \dots, n-1,$$

co kończy dowód twierdzenia.

Należy na koniec zauważyć, że istotną rolę w powyższym twierdzeniu odgrywa założenie (4). Bez tego założenia mogłyby nie istnieć całki $\varphi_0(x)$ i $\varphi_A(x)$ określone w całym przedziale $[a, b]$ (całka $\varphi_A(x)$ mogłaby nie istnieć nawet lokalnie). Jeżeli jednak założymy nawet istnienie takich całek, to i tak twierdzenie bez założenia (4) jest nieprawdziwe. Świadczy o tym następujący przykład:

Weźmy pod uwagę równanie

$$y'' = -\left(1 + \frac{p}{2}\right)y^{1+p} \quad p > 0.$$

Całką tego równania jest funkcja identycznie zerowa. Jest ona przy tym jedyną (ze względu na regularność prawej strony) całką spełniającą warunki początkowe

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Całką tego równania jest również dla każdego $M > 0$ funkcja $\varphi_M(x)$, którą określamy w przedziale

$$[0, M^{-p/2}F(1)]$$

jako funkcję odwrotną do funkcji

$$\psi_M(y) = M^{-p/2}F\left(\frac{y}{M}\right) \quad 0 \leq y \leq M,$$

a w przedziale

$$[M^{-p/2}F(1), 2M^{-p/2}F(1)]$$

jako odwrotną do funkcji

$$\bar{\varphi}_M(y) = M^{-p/2} \left[2F(1) - F\left(\frac{y}{M}\right) \right] \quad M \leq y \leq 2M,$$

przy czym

$$F(u) = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^{2+p}}}.$$

Funkcja $\varphi_M(x)$ spełnia, jak łatwo widać, warunki brzegowe

$$\varphi_M(\alpha_1) = \beta_1, \quad \varphi_M(\alpha_2) = \beta_2,$$

gdzie

$$\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0 \quad \alpha_2 = 2M^{-p/2}F(1).$$

Oczywiście ilorazy $D^0[\alpha_1; \beta_1]$ i $D^1[\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2]$ są dla funkcji $\varphi_M(x)$ stale równe zero i zbiegają przy $M \rightarrow \infty$ do zera. Do zera również przy $M \rightarrow \infty$ zbiegają α_1 i α_2 . Całka $\varphi_M(x)$ posiada jednak w punkcie $\alpha_2/2$ maksimum równe M , a zatem do funkcji identycznie zerowej nie zbiega.

Z przykładu tego wynika również, że oszacowanie (4) jest możliwe najlepsze spośród wszystkich oszacowań typu

$$(14) \quad |f(x, y_0, \dots, y_{n-1})| \leq K + L \sum_{i=0}^{n-1} |y_i|^q$$

i że dla $q > 1$ twierdzenie jest nieprawdziwe.

Katedra Analizy Matematycznej
Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków

Otrzymano: 24. 11. 1958 r.

SUMMARY

A Note on the Relationship between the Initial and the Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equation of the n-th Order

We assume that the right-hand member of the equation (1) satisfies (4). Equation (1) is supposed to possess the uniqueness property. Suppose that the difference ratios determined by the boundary conditions (5) converge to initial data (3). Let $\varphi_A(x)$ be the

integral of (1) and let $\varphi_A(x)$ satisfy (5). Denote by $\varphi_0(x)$ the solution of (1) such that $\varphi_0^{(i)}(\alpha_0) = \gamma_i$ ($i = 0, \dots, n-1$). It is shown that

$$\lim \varphi_A^{(i)}(x) = \varphi_0^{(i)}(x) \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

uniformly in the considered interval. We present an example which indicates that the assumption (4) is the best one if we restrict ourselves to conditions of the form (14).

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. Cinquini, *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali di ordine n*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, (2) 9, 61-77 (1940).
- [2] O. Haupt und G. Auman, *Differential- und Integralrechnung*, II Band, s. 70-83, Berlin 1938.
- [3] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, s. 149, (1947).
- [4] В. Немыцкий, и В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений* (1949) стр. 16-18.