ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
Nr 38 PRACE MATEMATYCZNE ZESZYT 6 1961

Włodzimierz Mlak

O pierwszym zagadnieniu brzegowym dla równania $y'' = f(t, y, y')$

Rozważać będziemy zagadnienie brzegowe dla równania

$$y'' = f(t, y, y') \tag{1}$$

polegające na znalezieniu rozwiązania $y(t)$ spełniającego warunki brzegowe

$$y(0) = y(1) = 0 . \tag{2}$$

W dalszym ciągu celem uproszczenia zagadnienie to nazywać będziemy krótko zagadnieniem (1), (2). Celem naszych rozważań będzie pokazanie w jaki sposób, na drodze bezpośrednich konstrukcji, można przy pewnych typowych założeniach zastosować do rozwiązania problemu (1), (2) metodę topologiczną Prof. T. Ważewskiego.

W pracy [3] podany jest przykład zastosowania wspomnianej metody topologicznej do zagadnienia z warunkami brzegowymi, które w odniesieniu do równania (1) przybierają następującą postać:

$$y(0) = y'(1) = 0 . \tag{3}$$

Należy podkreślić, że przedstawiony w niniejszej pracy wynik posiada w pierwszym rzędzie znaczenie metodologiczne [1]).

1. Odnośnie do pojęć używanych w naszych rozważaniach odwołujemy się do pracy [3]. Bez zwężenia ogólności możemy w dalszym ciągu zakładać, że omawiane równania czy też układy równań są jednotliwe (p. [1] i [3] str. 313).

O prawej stronie równania (1) zakładamy co następuje:

(4) funkcja $f(t, y, z)$ jest ciągła dla $t \in [0, 1]$ i y, z dowolnych

(5) istnieje stała $M > 0$ taka, że dla $-\infty < z < +\infty$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ zachodzą warunki:

$$f(t, y, z) > -M , \quad \text{gdy} \quad y \geqslant 0$$
$$f(t, y, z) < M , \quad \text{gdy} \quad y \leqslant 0 .$$

[1]) Przegląd twierdzeń o istnieniu rozwiązań problemu (1), (2) znaleźć można w [2].

Równanie (1) zamieniamy na układ

$$(6)\qquad \begin{aligned} y' &= z \\ z' &= f(t, y, z) . \end{aligned}$$

Weźmy pod uwagę układ porównawczy

$$(7)\qquad \begin{aligned} y' &= z \\ z' &= -M . \end{aligned}$$

Na drodze elementarnych rachunków łatwo się przekonać, że równanie powierzchni utworzonej przez całki układu (7) wychodzące z prostej o równaniach $y = 0, t = 1$ ma następującą postać

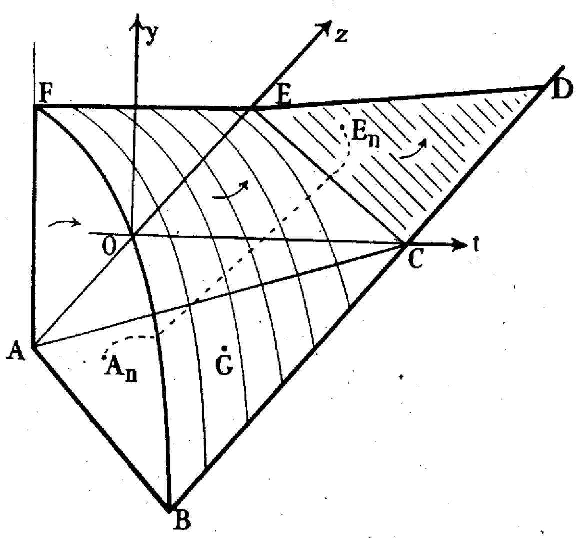
$$(8)\qquad y - \frac{M}{2}t^2 + Mt - zt + z - \frac{M}{2} = 0 .$$

Linia przecięcia powierzchni (8) z płaszczyzną $y = 0$ ma równanie

$$\frac{M}{2}(t-1)(t+1) + z(t-1) - M(t-1) = 0 .$$

Stąd, dla $0 \leqslant t < 1$ wnioskujemy, że linia ta jest prostą o równaniu

$$(9)\qquad z = -\frac{M}{2}t + \frac{M}{2} .$$



Rys. 1.

Dalsze rozważania odniesiemy do rysunku 1. Prosta (9) jest prostą wyznaczoną przez punkty C i E. Prowadzimy teraz płaszczyznę

$$(10)\qquad z = -\frac{M}{2} - Mt ,$$

która wyznaczona jest przez punkty A, B i F oraz bierzemy odbicie symetryczne względem osi t odcinka AB: odbicie to oznaczamy przez ED. Leży ono, jak łatwo się przekonać, na płaszczyźnie o równaniu

$$z = Mt + \frac{M}{2}. \tag{11}$$

Zauważmy jeszcze, że prosta BD jest prostą o równaniu $t = 1, y = 0$, punkt F na współrzędne $(0, M, -M/2)$ oraz odcinki EF i BC leżą na powierzchni (8).

Rozważane w dalszym ciągu płaty powierzchniowe traktujemy jako płaty bez brzegu (płaty otwarte): Odcinki otwarte piszemy w postaci AB: odcinek zawierający A, lecz pozbawiony B oznaczamy przez $\dot{A}B$ a odcinek zawierający oba końce oznaczamy przez $\dot{A}\dot{B}$. Oznaczmy teraz przez S_1^+ (powierzchnia zakreskowana na rysunku) powierzchnię utworzoną z trójkąta CDE oraz części powierzchni (8) ograniczonej przez odcinki BC, CE, EF i łuk $\widehat{FB}$ leżący na płaszczyźnie (10), a przez S_2^+ płat wykrojony z płaszczyzny (10) ograniczony przez odcinki FA, AB i łuk $\widehat{FB}$. Płat powstały przez sklejenie wzdłuż łuku BF płatów S_1^+, S_2^+ oznaczamy przez $S^+ - S^+ = S_1^+ + S_2^+$. Przeprowadzając analogiczną konstrukcję dla układu porównawczego

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= M \end{aligned} \tag{12}$$

otrzymamy powierzchnię $S^- = S_1^- + S_2^-$, gdzie S_1^- składa się z trójkąta ABC oraz płatu usłanego przez całki układu (12), określonego podobnie jak w przypadku układu (7). S_1^- będzie odbiciem symetrycznym względem osi t płatu S_1^+. Analogicznie S_2^- będzie stosownym płatem leżącym na płaszczyźnie (11) pod płaszczyzną (t, z): S_2^- będzie odbiciem symetrycznym względem osi t płatu S_2^+. Obszar ograniczony przez płaty S^+, S^- oraz trójkąty AEF i AEG (G jest obrazem symetrycznym względem 0 punktu F) oznaczmy przez ω. Pojęcia punktów wyjścia, wejścia, poślizgu całek etc odnoszą się do układu (6) i obszaru ω.

2. Wykażemy następujący lemat:

Lemat. Przypuśćmy, że spełnione są założenia (4) i (5). Wówczas każdy punkt należący do $S_1^+ + S_1^- + AC + EC$ jest punktem ścisłego wyjścia. Każdy punkt należący do $S_2^+ + S_2^-$ jest punktem ścisłego wejścia. Punkty odcinków AB i ED oraz łuków $\widehat{BF}$ i $\widehat{DG}$ są punktami zewnętrznego poślizgu.

Dowód: Dowód przeprowadzimy dla stosownej części brzegu zbioru ω, znajdującej się nad płaszczyzną (t, z). Dla pozostałej części brzegu dowód przebiega analogicznie.

Przepiszmy równanie powierzchni (8)

$$\Phi(t, y, z) = y - \frac{M}{2} t^2 + Mt - zt + z - \frac{M}{2} = 0$$

oraz układ (6)

$$y' = z$$
$$z' = f(t, y, z).$$

Pochodna zupełna $\dot{\Phi}(t, y, z)$ funkcji Φ względem układu (6) ma postać następującą:

$$\dot{\Phi}(t, y, z) = (1-t)\big(f(t, y, z) + M\big).$$

Jeżeli $y \geqslant 0$ to $f(t, y, z) + M > 0$ a więc przy $0 \leqslant t < 1$ jest $\dot{\Phi} > 0$. Lecz punkt $(\frac{1}{2}, 0, 0) \in \omega$ i $\Phi(\frac{1}{2}, 0, 0) < 0$. Punkty płata krzywoliniowego $BCEF$ są więc punktami ścisłego wyjścia.

Weźmy płaszczyznę (10) o równaniu $z + Mt + \frac{M}{2} \equiv \Psi(t, y, z) = 0$.

Pochodna zupełna $\dot{\Psi}$ względem (6) ma postać

$$\dot{\Psi} = M + f(t, y, z)$$

i dla $y \geqslant 0$ jest $\dot{\Psi} > 0$. Zarazem $\Psi(\frac{1}{2}, 0, 0) > 0$. Wynika stąd, że punkty płata S_2^+ są punktami ścisłego wejścia. Punkty łuku $\widehat{BF}$ będą więc punktami poślizgu zewnętrznego. Łatwo się przekonać, że punkty płata CDE i odcinka EC są punktami ścisłego wyjścia. Z drugiej strony można pokazać, podobnie jak dla płata S_2^+, że punkty płata S_2^- są punktami ścisłego wejścia. Wynika stąd, że punkty odcinka ED są punktami poślizgu zewnętrznego. Analogicznie pokazujemy, że punkty odcinka AB są punktami poślizgu zewnętrznego. Lemat możemy więc uważać za udowodniony.

T w i e r d z e n i e. Załóżmy, że spełnione są warunki (4) i (5). Istnieje wówczas co najmniej jedno rozwiązanie problemu (1), (2) przebiegające dla $0 < t < 1$ w ω.

D o w ó d: Weźmy pod uwagę łuk pojedynczy Z_n (zaznaczony na rys. 1 linią przerywaną) o końcach A_n i E_n, leżący w obszarze ω i niech $A_n \in ABC$ oraz $E_n \in CDE$. Krzywe Z_n możemy tak dobrać, aby spełniony był następujący warunek:

$$(13) \qquad \varrho(Z_n, AE) \to 0, \quad \text{gdy} \quad n \to +\infty.$$

Rozumować będziemy podobnie jak w dowodzie tw. 1 pracy [3]. Przypuśćmy, że nie istnieje rozwiązanie układu (6) wychodzące z łuku otwartego Z_n, przebiegające całkowicie w ω i kończące się na $\dot{B}\dot{D}$. Każda całka układu (6), wychodząca z łuku otwartego Z_n, da się przedłużyć do brzegu. Gdyby wśród tych całek była taka, która stale przebiega w ω to musiałaby ona docierać do $\dot{B}\dot{D}$. Przeczyłoby to naszemu przypuszczeniu. Stąd i z lematu wynika, że każda całka wychodząca z łuku otwartego Z_n spotyka się ze zbiorem $S = S_1^+ + S_1^-$. Każdemu $P \in Z_n$ możemy więc przypisać punkt $Q \in S$, w którym całka układu (6) wychodząca z P spotyka S po raz pierwszy. Przyporządkowanie to oznaczamy przez C. Mamy zatem $Q = C(P)$. Kładziemy zarazem z definicji $C(A_n) = A_n$, $C(E_n) = E_n$. Tak określona transformacja $C(P)$ jest ciągła na łuku domkniętym Z_n (p. [3] lemat 1). Łatwo zauważyć, że zbiór składający się z dwu punktów A_n i E_n jest retraktem zbioru S: transformacją retrahującą jest transformacja $U(Q)$ określona jak następuje:

$$U(Q) = \begin{cases} E_n, & \text{gdy} \quad Q \in S_1^+ \\ A_n, & \text{gdy} \quad Q \in S_1^- . \end{cases}$$

Transformacja złożona $UC(P)$ jest ciągła na łuku domkniętym Z_n i przeprowadza go w końce A_n, E_n. Poza tym $UC(A_n) = A_n$ i $UC(E_n) = E_n$. Zbiór składający się z końców A_n, E_n krzywej Z_n jest więc retraktem tej krzywej, co jak wiadomo nie zachodzi. Istnieje zatem całka c_n układu (6) łącząca łuk otwarty Z_n z $\dot{B}\dot{D}$. Wobec (13) i z uwagi na fakt, że całki łączące Z_n z $\dot{B}\dot{D}$ przebiegają w obszarze ω z łatwością dowodzimy, że istnieje ciąg wybrany całek c_{α_n} zbieżny w $(0, 1]$ niemal jednostajnie do rozwiązania problemu (1), (2) przebiegającego całkowicie w ω. Twierdzenie nasze zostało zatem wykazane.

Zauważmy, że domknięcie zbioru ω leży w prostopadłościanie $0 \leqslant t \leqslant 1$, $|y| \leqslant \frac{5}{2} M$, $|z| \leqslant \frac{3}{2} M$. Wynika stąd, że twierdzenie nasze pozostaje prawdziwe, jeżeli warunek (5) zastąpimy następującym:

(14) Istnieje stała $M > 0$ taka, że przy pewnym $\varepsilon > 0$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$ i $|z| \leqslant \frac{3}{2}(M + \varepsilon)$ zachodzą warunki:

$$f(t, y, z) > -M, \quad \text{gdy} \quad 0 \leqslant y \leqslant \tfrac{5}{2}(M + \varepsilon)$$

$$f(t, y, z) < M, \quad \text{gdy} \quad -\tfrac{5}{2}(M + \varepsilon) \leqslant y \leqslant 0 .$$

Łatwo podać szereg warunków analitycznych w postaci nierówności, które gwarantowałyby spełnienie założenia (14). W ten sposób można by uzyskać szereg nowych twierdzeń o istnieniu rozwiązań problemu (1), (2).

Katedra Analizy Matematycznej
Uniwersytetu Jagiellońskiego

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Bielecki, *Sur une méthode de régularisation des équations différentielles ordinaires dont les intégrales ne remplissent pas la condition d'unicite,* Bull. Ac. Polonaise des Sc. Cl. III. Vol. IV. No. 8. 1956, str. 497—501.

[2] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale,* Parte prima, Bologna 1949.

[3] T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique det intégrales des équations différentielles ordinaires,* Annales Soc. Polonaise de Math. T. XX. 1947, str. 279—313.

SUMMARY

On the First Boundary Value Problem for the Equation $y'' = f(x, y, y')$

In the paper the problem of existence of the integral of the equation $y'' = f(x, y, y')$ satisfying the conditions $y(0) = y(1) = 0$ is considered. It is shown in what way the topological method of Ważewski may be applied to solve the problem using some typical assumptions.

СОДЕРЖАНИЕ

О первой граничной проблеме для уравнения $y'' = f(x, y, y')$

В работе рассматривается проблема существования интеграла уравнения $y'' = f(x, y, y')$ удовлетворяющего условиям $y(0) = y(1) = 0$. Показано, каким образом, при некоторы типовых положениях, можно применять для решения это й задачи топологический мето Т. Важевского.