

*Andrzej Lasota*

## O zbieżności do zera całek oscylujących równania różniczkowego zwyczajnego rzędu drugiego

Będziemy rozważali równanie różniczkowe

$$(1) \quad u'' = f(t, u, u'),$$

w którym występująca po prawej stronie funkcja  $f(t, u, v)$  jest określona i ciągła w obszarze

$$D: \quad a < t, \quad u, v \text{ dowolne.}$$

Jeżeli jakaś całka  $u(t)$  równania (1) przyjmuje dla ciągu wartości  $t_n$  spełniającego warunki

$$(2) \quad \begin{aligned} a < t_1 < t_2 < t_3 \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty \end{aligned}$$

wartość równą zero, to znaczy

$$(3) \quad u(t_n) = 0$$

to, na ogół nawet dla bardzo specjalnych funkcji  $f(t, u, v)$  (na przykład liniowych) nie musi ona przy  $t \rightarrow \infty$  posiadać granicy. Jako przykład może służyć tu równanie

$$u'' = -u,$$

którego całka  $u = \sin t$  zerująca się dla  $t_n = \pi n$  przy  $t \rightarrow \infty$  granicy nie posiada.

Jeżeli jednak wiemy, że miejsca zerowe całki  $u(t)$  równania (1) zagęszczają się, to znaczy, że zachodzi również warunek

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (t_{n+1} - t_n) = 0$$

wówczas dla dość szerokiej klasy funkcji  $f(t, u, v)$  można stąd wywnioskować, że

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0.$$

W nocie tej podamy klasę takich funkcji  $f(t, u, v)$  i pokażemy, że dla funkcji spoza tej klasy warunki (2), (3) i (4) dla całek równania (1) nie pociągają za sobą na ogół warunku (5).

Zacznijemy od podania dwu lematów dotyczących nierówności różniczkowych rzędu drugiego.

Lemat 1. Jeżeli funkcja  $u(t)$  klasy  $C^2$  spełnia w przedziale domkniętym  $[a, b]$  nierówność

$$(6) \quad |u''(t)| < K(1 + |u'(t)| + |u(t)|)$$

oraz warunki brzegowe

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0$$

wtedy

$$(7) \quad b - a \geq \min \left( \frac{1}{4K + 1}, \frac{1}{2K + 1} \max_{[a,b]} |u(t)| \right).$$

Dowód. Z twierdzenia Rolle'a wynika, że w pewnym punkcie  $c$  z przedziału  $(a, b)$   $u(c) = 0$ . Mamy więc dla  $a \leq t \leq b$

$$(8) \quad |u'(t)| = |u'(t) - u'(c)| \leq (b - a) \max_{[a,b]} |u''(t)|$$

oraz

$$|u(t)| = |u(t) - u(a)| \leq (b - a) \max_{[a,b]} |u'(t)|.$$

Z tych dwu nierówności otrzymujemy natychmiast, że

$$(9) \quad |u(t)| \leq (b - a) \max_{[a,b]} |u'(t)| \leq (b - a)^2 \max_{[a,b]} |u''(t)| \quad \text{dla } a \leq t \leq b.$$

Korzystając z oszacowań (8) i (9) i nierówności (6) otrzymujemy dla  $a \leq t \leq b$

$$(10) \quad |u''(t)| \leq K + K \left( (b - a) + (b - a)^2 \right) \max_{[a,b]} |u''(t)|.$$

Przypuśćmy teraz dla dowodu nie wprost, że nierówność (7) nie zachodzi. Mamy więc

$$(11) \quad (b - a) < 1, \quad 2K(b - a) < \frac{1}{2}, \quad \max_{[a,b]} |u(t)| > 2K(b - a)$$

a zatem z nierówności (10) dostajemy, że dla  $a \leq t \leq b$

$$|u''(t)| \leq K + \frac{1}{2} \max_{[a,b]} |u''(t)|$$

czyli

$$\max_{[a,b]} |u''(t)| \leq 2K.$$

Z nierówności (9) otrzymujemy stąd natychmiast, że

$$|u(t)| \leq (b-a)^2 2K \quad \text{dla} \quad a \leq t \leq b,$$

co jest niemożliwe wobec pierwszej i trzeciej nierówności (11).

Lemat 2. Jeżeli funkcja  $u(t)$  klasy  $C^2$  spełnia w domkniętym przedziale  $[a, b]$  nierówność

$$(12) \quad |u''(t)| \leq \varphi(u'(t)) + \psi_h(u(t), u'(t)), \quad h > 0$$

oraz warunki brzegowe

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0$$

przy czym  $\varphi(u)$  i  $\psi_h(u, v)$  są funkcjami ciągłymi dla dowolnych  $u, v$  a nadto

$$(13) \quad \psi_h(u, v) = 0 \quad \text{dla} \quad |v| < h$$

wtedy

$$(14) \quad b-a \geq \min \left( \frac{2h}{\max_{|v| \leq h} \varphi(v)}, \frac{1}{h} \max |u(t)| \right).$$

Dowód. Jeżeli funkcja  $u(t) \equiv 0$  w przedziale  $[a, b]$  wówczas nierówność (14) jest oczywiście prawdziwa. Jeżeli zaś  $u(t) \not\equiv 0$  wówczas istnieje w przedziale otwartym  $(a, b)$  taki punkt  $c$ , w którym

$$u(c) = \max_{[a,b]} |u(t)| \quad \text{lub} \quad -u(c) = \max_{[a,b]} |u(t)|.$$

Ograniczmy się do pierwszego z tych przypadków i założymy dla dowodu nie wprost, że

$$(15) \quad \frac{1}{b-a} \max_{[a,b]} |u(t)| > h$$

oraz

$$(16) \quad (b-a) \max_{|v| \leq h} \varphi(v) < 2h.$$

Mamy wtedy oczywiście

$$u(c) = 0,$$

$$\frac{u(c) - u(a)}{c-a} > h,$$

$$\frac{u(c) - u(b)}{c-b} < -h.$$

Z nierówności tych oraz z ciągłości funkcji  $u'(t)$  wynika istnienie takich liczb  $a < \xi < c < \eta < b$ , że

$$(17) \quad |u'(t)| < h \quad \text{dla} \quad \xi < x < \eta$$

oraz

$$u'(\xi) = h, \quad u'(\eta) = -h.$$

W przedziale  $(\xi, \eta)$ , jak to wynika z nierówności (12), (17) i założenia (13), spełniona jest nierówność

$$|u''(t)| \leq \varphi(u'(t))$$

a stąd i z (17) otrzymujemy, że

$$\max_{[\xi, \eta]} |u''(t)| \leq \max_{|v| \leq h} \varphi(v)$$

Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych mamy zatem

$$2h = u'(\xi) - u'(\eta) \leq (\eta - \xi) \max_{[\xi, \eta]} |u''(t)| \leq (a - b) \max_{|v| \leq h} \varphi(v).$$

Otrzymana nierówność jest sprzeczna z nierównością (16) i kończy dowód lematu 2.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

**Twierdzenie.** Jeżeli  $f(t, u, v)$  jest funkcją ciągłą w obszarze  $D$  i spełnia w nim jeden z dwu warunków

$$(18) \quad |f(t, u, v)| \leq K(1 + |u| + |v|)$$

lub

$$(19) \quad |f(t, u, v)| \leq \varphi(u) + \psi_n(u, v),$$

przy czym funkcje  $\varphi$  i  $\psi_n$  są ciągłe dla dowolnych  $u, v$  i spełniają warunek (13), wtedy każda całka  $u(t)$  równania (1), dla której zachodzą warunki (2), (3) i (4) spełnia również warunek (5).

**Dowód.** Rozpatrywana całka  $u(t)$  równania (1) spełnia na podstawie (18) i (19) jedną z dwu nierówności

$$|u''| \leq K(1 + |u'| + |u|)$$

$$|u''| \leq \varphi(u) + \psi_n(u, u')$$

a zatem na podstawie lematów 1 i 2 zastosowanych do przedziału  $[t_n, t_{n+1}]$  otrzymujemy, że

$$t_{n+1} - t_n \geq \min \left( \frac{2h}{\max_{|v| \leq h} \varphi(v)}, \frac{1}{h} \max_{[t_n, t_{n+1}]} |u(t)| \right)$$

względnie

$$t_{n+1} - t_n \geq \min \left( \frac{1}{4K+1}, \frac{1}{2K+1} \max_{[t_n, t_{n+1}]} |u(t)| \right).$$

Ponieważ zaś na podstawie (4)  $t_{n+1} - t_n \rightarrow 0$  więc z tych dwu ostatnich nierówności wynika, że

$$\max_{[t_n, t_{n+1}]} |u(t)| \rightarrow 0 \quad \text{przy} \quad n \rightarrow \infty$$

a zatem również

$$\sup_{t \geq t_N} |u(t)| = \sup_{n \geq N} \max_{[t_n, t_{n+1}]} |u(t)| \quad \text{przy} \quad N \rightarrow \infty$$

stąd zaś wynika, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$$

co kończy dowód twierdzenia.

Warto zauważyć, że jeżeli funkcja  $f(t, u, v)$  wzrasta szybko wraz ze wzrostem  $t, u, v$  (szybciej niż na to pozwalają oszacowania (18) lub (19) wtedy twierdzenie nasze się nie utrzymuje. Podamy przykład.

Otóż funkcja  $u = \sin e^t$  jest jak łatwo sprawdzić całką równania

$$(20) \quad u'' = -e^{2t}u + u'.$$

Funkcja  $\sin e^t$  zeruje się w punktach

$$t_n = \log n\pi \quad n = 1, 2, \dots$$

przy czym oczywiście  $t_n$  oraz

$$t_{n+1} - t_n = \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$$

spełnione są więc związki (2) i (4) mimo to jednak

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sin e^t = 1$$

i zbieżność (5) nie zachodzi.

Zauważmy, że bezwzględna wartość współczynnika przy  $u$  po prawej stronie równania (20), to jest funkcja  $e^{2t}$ , rośnie przy  $t \rightarrow \infty$  nieograniczenie. Właśnie dzięki temu dla równania (20) teza naszego twierdzenia nie zachodzi.

Twierdzenie to daje się uogólnić na przypadek równania rzędu  $n$ -tego

$$(21) \quad u^{(n)} = f(t, u, u', \dots, u^{n-1})$$

przy założeniu, że prawa strona równania (21) spełnia warunek

$$(22) \quad |f(t, u_0, u, \dots, u_{n-1})| \leq K \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} |u_i|\right).$$

Dowód jest podobny do dowodu dla przypadku  $n = 2$  i opiera się o twierdzenia [1] dotyczące nierówności różniczkowych rzędu  $n$ -tego podobne do lematu 1. Byłoby rzeczą interesującą podać oszacowania nieliniowe (analogiczne do (19)), które mogłyby zastąpić warunek (22).

## BIBLIOGRAFIA

- [1] C. de la Vallée Poussin, *Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre  $n$ .* Journal de Mathématiques pures et appliquées. Tome 8 (1929), p. 136.

## SUMMARY

*On Convergence to Zero of Oscillating Integrals of an Ordinary Differential Equation of Second Order*

The paper is concerned with the equation

$$(1) \quad u'' = f(t, u, u')$$

in which the function  $f(t, u, v)$  appearing on the right side is defined and continuous in a region,

$$D: \quad a < t, \quad u, \quad v \quad \text{arbitrary}$$

and satisfies one of the two conditions

$$(18) \quad |f(t, u, v)| \leq K(1 + |u| + |v|), \quad K \text{ is constant}$$

or

$$(19) \quad |f(t, u, v)| \leq \varphi(v) + \psi_h(u, v).$$

We assume that the functions  $\varphi(v)$  and  $\psi_h(u, v)$  are continuous for arbitrary  $u, v$  and satisfy the condition

$$(13) \quad \psi_h(n, v) = 0 \quad \text{for} \quad |v| < h.$$

With these assumptions we prove that each integral  $u(t)$  of the equation (1) satisfying the conditions

$$(3) \quad u(t_n) = 0$$

$$a < t_1 < t_2 < \dots$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$$

$$(4) \quad \lim (t_{n+1} - t_n) = 0$$

satisfies also the condition

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0.$$

## СОДЕРЖАНИЕ

*О сходимости к нулю осциллирующих интегралов обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка*

В нашей работе занимаемся уравнением:

$$(1) \quad u'' = f(t, u, u'),$$

в котором выступающая по правой стороне функция  $f(t, u, v)$  является определенной и непрерывной в области

$$D: a < t, \quad u, v \text{ — произвольные}$$

и удовлетворяет одному из двух условий

$$(18) \quad |f(t, u, v)| \leq K(1 + |u| + |v|), \quad K \text{ — постоянная}$$

или

$$(19) \quad |f(t, u, v)| \leq \varphi(v) + \psi_h(u, v)$$

Полагаем, что функции  $\varphi(v)$  и  $\psi_h(u, v)$  являются непрерывными для произвольных  $u, v$  и удовлетворяют условию:

$$(13) \quad \psi_h(u, v) = 0 \quad \text{для} \quad |v| < h.$$

При этих положениях доказываем, что каждый интеграл  $u(t)$  уравнения (1), удовлетворяющий условиям

$$(3) \quad u(t_n) = 0$$

$$(2) \quad a < t_1 < t_2 < t_3 \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (t_{n+1} - t_n) = 0$$

удовлетворяет также условию:

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0.$$