ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

Nr 38 PRACE MATEMATYCZNE ZESZYT 6 1961

Andrzej Lasota

O pewnym kryterium identyczności pól sił potencjalnych na prostej

Równanie różniczkowe

(1) $$\frac{d^2u}{dt^2} = f(u)$$

może być traktowane jako równanie ruchu punktu materialnego P o masie jednostkowej, poruszającego się pod wpływem siły zależnej jedynie od położenia. Z powodu tej interpretacji zmienną t występującą w równaniu (1) będziemy nazywali czasem.

Jeżeli funkcja $f(u)$ jest określona i ciągła dla wszystkich wartości zmiennej u i spełnia warunek

(2) $$f(u)u < 0 \quad \text{dla} \quad u \neq 0\,,$$

wtedy każda całka równania (1) spełniająca warunki początkowe

$$u(0) = \xi\,, \qquad u'(0) = 0$$

jest wyznaczona przez te warunki jednoznacznie i dociera po pewnym skończonym czasie $T(\xi, f)$ do osi czasu, to jest $u\big(T(\xi, f)\big) = 0$.

Można pokazać [1], że jeżeli funkcje $f_1(u)$ i $f_2(u)$ są ciągłe i spełniają warunek (2) wtedy warunek

(3) $$T(\xi, f_1) = T(\xi, f_2) \quad \text{dla wszystkich } \xi$$

pociąga za sobą warunek

(4) $$f_1(u) = f_2(u) \quad \text{dla wszystkich } u\,.$$

W interpretacji fizycznej oznacza to, że identyczność dwu pól sił f_1 i f_2 można sprawdzić posługując się następującym doświadczeniem:

Puszczamy swobodnie w punkcie $u = \xi$ punkt materialny P i mierzymy czas $T(\xi, f_i)$, po jakim dotrze on, poruszając się pod wpływem pola f_i, do położenia $u = 0$.

Jeżeli pomiary wykażą, że zachodzi (3) wtedy wnioskujemy stąd o identyczności pól f_1 i f_2.

Oczywiście tego rodzaju kryterium identyczności sił pól daje się stosować tylko wtedy gdy spełniony jest warunek (2). W przeciwnym bowiem wypadku punkt wypuszczony z odległości $|\xi| > 0$ od położenia $u = 0$ może do tego położenia w ogóle nie dotrzeć.

Można jednak sposób postępowania nieco zmienić i wypuszczać punkt P z pewną prędkością początkową $u'(0)$ skierowaną do położenia $u = 0$. Jeżeli prędkość początkowa będzie dostatecznie duża punkt P dotrze do położenia $u = 0$ po pewnym skończonym czasie $T(\xi, f)$. Powstaje pytanie czy również w tym wypadku identyczność (3) pociąga za sobą identyczność (4). Odpowiedź da nam twierdzenie sformułowane w § 2.

§ 1. Podamy teraz dwa lematy dotyczące własności całek równania (1). Zakładamy przy tym, że funkcja f jest ciągła dla $0 \leqslant x < a$.

Lemat 1. Jeżeli dwie całki $u_1(t)$ i $u_2(t)$ równania (1) spełniają te same warunki początkowe

$$u_i(\alpha) = \xi\,, \quad u_i'(\alpha) = \eta \qquad i = 1, 2$$

i mają w przedziale (α, β) pochodne różne od zera i tego samego znaku

$$u_1'(t)\, u_2'(t) > 0 \qquad \text{dla} \qquad \alpha < t < \beta$$

to są one w tym przedziale identyczne.

Dowód. Mnożymy obie strony równania (1) przez $2u'$ i całkujemy w przedziale $[\bar{t}, \bar{\bar{t}}]$. Mamy wtedy:

$$[u'(\bar{\bar{t}})]^2 - [u'(\bar{t})]^2 = F\big(u(\bar{\bar{t}})\big) - F\big(u(\bar{t})\big)\,, \tag{5}$$

gdzie

$$F(u) = 2\int_0^u f(s)\,ds\,.$$

Dla $u(t) = u_i(t)$, $\bar{t} = \alpha$, $\bar{\bar{t}} = t$ otrzymujemy stąd

$$\big(u_i'(t)\big)^2 = F\big(u_i(t)\big) - F(\xi) + \eta^2$$

czyli

$$u_i'(t) = \varepsilon\big[F\big(u_i(t)\big) - F(\xi) + \eta^2\big]^{1/2}$$

gdzie

$$\varepsilon = \operatorname{sign} u_i'(t)\,.$$

Funkcje $u_i(t)$ spełniają więc w przedziale (α, β) równanie pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych i o prawej stronie różnej od zera. Są one zatem z uwagi na to, że $u_1(\alpha) = u_2(\alpha)$ w tym przedziale identyczne.

Lemat 2. Jeżeli wszystkie całki równania (1) spełniające warunki

(6) $$u(0) = \xi\,,\; u'(0) = \eta \leqslant 0$$

docierają do osi czasu po skończonym czasie, to docierają one wszystkie po tym samym czasie T, są w przedziale $[0, T]$ identyczne i mają dla $0 < t < T$ pochodną $u'(t)$ ujemną.

Dowód. Niech $u(t)$ będzie ustaloną całką równania (1), która spełnia warunki (6) i dociera do osi czasu w momencie T. Na podstawie lematu 1 dla dowodu lematu 2 wystarczy pokazać, że całka $u(t)$ ma w przedziale $(0, T)$ pochodną ujemną.

Dowiedziemy najpierw, że dla każdego $0 \leqslant t_0 < T$ warunek $u'(t_0) = 0$ pociąga za sobą warunek $u''(t_0) < 0$.

Istotnie niech na przykład

$$1^\circ \quad u'(t_0) = 0 \quad \text{i} \quad u''(t_0) = 0$$

Połóżmy

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ u(t_0) & \text{dla} \quad t > t_0\,. \end{cases}$$

Ponieważ $t_0 < T$ więc $u(t_0) > 0$. Funkcja $v(t)$ jest, jak łatwo sprawdzić, całką równania (1). Spełnia ona warunki początkowe (6) i nie dociera do osi czasu. Przeczy to założeniom naszego lematu.

Weźmy teraz pod uwagę przypadek

2° $u'(t_0) = 0$ i $u''(t_0) > 0$. Mamy teraz

(7) $$f(u_0) = u''(t_0) > 0\,, \quad 0 < u_0 = u(t_0) < \xi\,.$$

Funkcja $f(u)$ jest ciągła nierówność (7) przenosi się zatem na otoczenie punktu u_0. Jest więc

(8) $$f(u) > 0 \quad \text{dla} \quad 0 < u_0 - \varepsilon \leqslant u \leqslant u_0\,.$$

Całka $u(t)$ dociera do osi czasu zatem w pewnej chwili t^* jest $u(t^*) = u_0 - \varepsilon$. Korzystając ze związku (5) dla $\bar{\bar{t}} = t^*$, $\bar{t} = t_0$ otrzymujemy

$$\big(u'(t^*)\big)^2 = F(u_0 - \varepsilon) - F(u_0) \geqslant 0$$

czyli

$$\int\limits_{u_0}^{u_0-\varepsilon} f(u)\,du \geqslant 0\,, \qquad \varepsilon > 0\,.$$

co jest sprzeczne z nierównością (8).

Dowiedliśmy więc, że istotnie warunek $u'(t_0) = 0$ pociąga za sobą dla $0 \leqslant t_0 < T$ warunek $u''(t_0) < 0$.

Z warunku $u'(0) = \eta \leqslant 0$ wynika stąd, że w pewnym prawym otoczeniu punktu $t = 0$ (wyłączając ewentualnie sam punkt $t = 0$) jest

$u'(t) < 0$. Przypuśćmy teraz dla dowodu nie wprost, że nierówność $u'(t) < 0$ nie zachodzi w całym przedziale otwartym $(0, T)$. Istnieje zatem w tym przedziale taki pierwszy punkt t_0, w którym $u'(t_0) = 0$. Jest więc też $u''(t_0) < 0$. W lewym otoczeniu punktu t_0, z wyjątkiem $t = t_0$, musi więc być $u'(t) > 0$, co jest sprzeczne z definicją punktu t_0. Otrzymana sprzeczność kończy dowód lematu 2.

§ 2. Na podstawie lematów 1 i 2 dowiedziemy z łatwością następującego twierdzenia:

Twierdzenie. Niech $f_i(u)$ $(i = 1, 2)$ będą funkcjami ciągłymi dla $0 \leqslant u < a$. Jeżeli dla każdego $0 \leqslant \xi < a$ wszystkie całki równań

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f_i(u) \qquad i = 1, 2 \tag{9}$$

spełniające warunki początkowe

$$u(0) = \xi\,, \quad u'(0) = \varphi(\xi) \leqslant 0 \tag{10}$$

docierają do osi czasu po tym samym (niezależnym od i) czasie $T(\xi)$, wtedy

$$f_1(u) = f_2(u) \qquad \text{dla} \qquad 0 \leqslant u < a \tag{11}$$

a ponadto całki równań (9) spełniające warunki (10) są w przedziale $[0, T(\xi)]$ wyznaczone jednoznacznie.

Dowód. Oznaczmy przez $u_{i,\xi}(t)$ całkę i-tego równania (9) spełniającą warunki (10). Z lematu 2 wynika, że całka ta jest w przedziale $0, T(\xi)]$ określona jednoznacznie oraz że

$$u'_{i,\xi}(t) < 0 \qquad \text{dla} \qquad 0 < t < T(\xi)\,.$$

Z wzoru (5) dla $u = u_i$, $\bar{\bar{t}} = t$, $\bar{t} = 0$, $f = f_i$ otrzymujemy

$$\big(u'_{i,\xi}(t)\big)^2 - \varphi^2(\xi) = F_i\big(u'_{i,\xi}(t)\big) - F_i(\xi)\,,$$

gdzie

$$F_i(u) = \int_0^u f_i(u)\,du$$

czyli

$$u'_{i,\xi}(t) = -\left[\varphi^2(\xi) + F_i\big(u_{i,\xi}(t)\big) - F_i(\xi)\right]^{1/2}.$$

Oznaczając przez $t_{i,\xi}(u)$ funkcję odwrotną do $u_{i,\xi}(t)$ mamy więc

$$t'_{i,\xi}(u) = -[\varphi^2(\xi) + F_i(u) - F_i(\xi)]^{-1/2}$$

a stąd całkując w przedziale $[0, \xi]$ otrzymujemy ostatecznie

$$T(\xi) = \int_0^\xi \frac{du}{\sqrt{\varphi^2(\xi) + F_i(u) - F_i(\xi)}}\,. \tag{12}$$

Dalej dowód przebiega już zupełnie podobnie jak w pracy [1]. Udowodnimy mianowicie, że w przedziale $(0, a)$ zachodzi identyczność $F_1(u) \equiv F_2(u)$, z której wobec ciągłości funkcji $f_i(u)$ wynika (11). Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że dla pewnego $u_1 > 0$ $F_1(u_1) \neq F_2(u_1)$ oznaczmy przez u_2 najmniejszy dodatni pierwiastek równania

$$F_1(u)-F_2(u) = F_1(u_1)-F_2(u_1)\,.$$

Pierwiastek ten istnieje ponieważ funkcja $F_1(u)-F_2(u)$ jest ciągła i dla $u = 0$ przyjmuje wartość 0.

Przez odjęcie od siebie wzorów (12) dla $\xi = u_2$ otrzymujemy

$$\int_0^{u_2} \frac{\sqrt{\varphi^2(u_2)+F_1(u)-F_1(u_2)}-\sqrt{\varphi^2(u_2)+F_2(u)-F_2(u_2)}}{\sqrt{\varphi^2(u_2)+F_1(u)-F_1(u_2)}\sqrt{\varphi^2(u_2)+F_2(u)-F_2(u_2)}}\,du\,.$$

Stąd zaś wynika, że istnieje punkt $0 < u_3 < u_2$ taki, że

$$\sqrt{\varphi^2(u_2)+F_1(u_3)-F_1(u_2)} = \sqrt{\varphi^2(u_2)+F_2(u_3)-F_2(u_2)}$$

czyli

$$F_1(u_3)-F_2(u_3) = F_1(u_2)-F_2(u_2) = F_1(u_1)-F_2(u_1)\,,$$

co ze względu na nierówność $0 < u_3 < u_2$ jest sprzeczne z określeniem punktu u_2. Sprzeczność ta kończy dowód naszego twierdzenia.

Istotną rolę w założeniach naszego twierdzenia odgrywa fakt, że wszystkie całki równań (9) spełniające warunki początkowe (10) docierają do położenia $u = 0$ po tym samym czasie $T(\xi)$. Z lematu 2 wynika, że warunek ten pociąga za sobą jednotliwość tych całek w przedziale $[0, T(\xi)]$. Oczywiście także na odwrót, jeżeli całki równań (9) są przez warunki (10) wyznaczone jednoznacznie i jeżeli docierają one po tym samym (dla obu równań) czasie do położenia $u = 0$ to założenia naszego twierdzenia są spełnione.

Jest interesujące, że możemy zarówno docieranie do osi czasu jak i jednotliwość rozważanych całek osiągnąć przy zadanych funkcjach f_i dobierając stosownie funkcję φ. Łatwo na przykład sprawdzić na podstawie wzoru (5), że jeżeli przyjmiemy

$$\varphi(\xi) < -\max_{i=1,2}\sqrt{2\int_0^{\xi}|f_i(u)|du}$$

wtedy całki równań (9) spełniające warunki (10) docierają do osi czasu stale z pochodną ujemną, a za tym są na podstawie lematu 1 jednotliwe.

BIBLIOGRAFIA

[1] Z. Opial, *O ruchach izo- i tautochronicznych*. Zeszyty Naukowe UJ, Nr 4 (1958) str. 13.

SUMMARY

On a Criterion of Identity of Fields of Potential Forces on the Straight Line

The following criterion of identity of the right sides of equations are given

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f_i(u) \quad i = 1, 2 . \tag{9}$$

If for every $0 \leqslant \xi < a$ all integrals of equations (9) satisfying the initial conditions

$$u(0) = \xi , \quad u'(0) = \varphi(\xi) \leqslant 0 \tag{10}$$

reach the time axis after the same (independent of i) time $T(\xi)$ then $f_1(u) \equiv f_2(u)$ for $0 \leqslant u < a$ and moreover integrals of equations (9) satisfying the conditions (10) are in the interval $[0, T(\xi)]$ uniquely determined.

We assume that the functions $f_i(u)$ $(i = 1, 2)$ are continuous in the interval $[0, a)$.

СОДЕРЖАНИЕ

О некотором критерии идентичности полей потенциальных сил на прямой

Приводим следующий критерий идентичности правых сторон уравнений

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f_i(u) \quad i = 1, 2 . \tag{9}$$

Если для каждого $0 \leqslant \xi < a$, все интегралы уравнений (9), удовлетворяющие начальным условиям

$$u(0) = \xi \quad u'(0) = \varphi(\xi) \leqslant 0 , \tag{10}$$

доходят до оси времени по истечении того же самого (независимого от i) времени $T(\xi)$, тогда

$$f_1(u) \equiv f_2(u) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant u < a ,$$

а сверх того интегралы уравнений (9), удовлетворяющие условиям (10), в интервале $[0, T(\xi)]$ определены однозначно. Принимаем при этом, что функции $f_i(u)$ $(i = 1, 2)$ являются непрерывными в интервале $[0, a]$.