ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

Nr 38 PRACE MATEMATYCZNE ZESZYT 6 1961

*Władysław Bach*

# O rozwartości i promieniu Feketego zbioru

W niniejszej pracy podamy rozwiązanie problemu postawionego przez prof. F. Leję [1] [1]).

Niech $R$ będzie dowolną przestrzenią metryczną. Punkty tej przestrzeni oznaczamy literami $p, q, \ldots$ Niech $\omega(p, q)$ będzie funkcją tworzącą, tj. funkcją określoną i ciągłą dla każdej pary punktów $p, q \in R$ oraz spełniającą warunki

$$\omega(p, q) \geqslant 0, \quad \omega(p, p) = 0, \quad \omega(p, q) = \omega(q, p).$$

Niech dalej $E$ będzie dowolnym zbiorem zwartym punktów przestrzeni $R$. Obierzmy w zbiorze $E$ układ $n+1$ punktów $p^{(n)} = \{p_0, \ldots, p_n\}$ i utwórzmy iloczyn

$$V(p^{(n)}) = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n} \omega(p_j, p_k).$$

Niech $V_n = V_n(E)$ będzie kresem górnym iloczynu $V(p^{(n)})$, gdy układ $p^{(n)}$ zmienia się w zbiorze $E$.

Niech $p_1, \ldots, p_n$ będą dowolnie ustalonymi punktami przestrzeni $R$. Iloczyn

$$u(p;\, p_1, \ldots, p_n) = \prod_{k=1}^{n} \omega(p, p_k)$$

jest funkcją zmiennej $p$ ciągłą w zbiorze $E$, osiąga więc w tym zbiorze pewne maximum zależne od punktów $p_1, \ldots, p_n$. Załóżmy

$$u_n = \inf_{\substack{p_k \in R \\ (k=1,\ldots,n)}} \{\max_{p \in E} u(p;\, p_1, \ldots, p_n)\}.$$

[1]) Myśl przewodnią rozwiązania tego problemu podawałem już w styczniu 1958 r. podczas jednego z zebrań seminaryjnych prof. Leji.

Wiadomo [2], że istnieją granice skończone

$$\lim_{n\to\infty} V_n^{\frac{2}{n(n+1)}} = V(E, \omega)$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n^{\frac{1}{n}} = u(E, \omega)$$

zwane odpowiednio rozwartością zbioru $E$ względem funkcji $\omega$, oraz promieniem Feketego zbioru $E$ względem funkcji $\omega$. Wiadomo poza tym [2], że zawsze

(1) $$0 \leqslant \mu(E, \omega) \leqslant v(E, \omega)$$

oraz, że jeśli $R$ jest płaszczyzną liczbową, a funkcją tworzącą odległość $|p-q|$ wówczas $\mu(E, \omega) = v(E, \omega)$.

Prof. F. Leja postawił następujący problem:

Niech $a_1, \ldots, a_k$ będą dowolnymi punktami płaszczyzny zespolonej, a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Oznaczmy przez $h(z)$ funkcję określoną wzorem

$$h(z) = (z-a_1)^{\alpha_1} \ldots (z-a_k)^{\alpha_k} .$$

Zbadać, czy równość $\mu(E, \omega) = v(E, \omega)$ zachodzi w przypadku, gdy funkcja tworząca ma postać

$$\omega(p, q) = \frac{|p-q|}{|h(p)\cdot h(q)|} .$$

Należy przy tym założyć, że zbiór $E$ (domknięty i ograniczony) nie zawiera punktów $a_1, \ldots, a_k$.

Rozpatrzmy cztery możliwe przypadki:

1° $v(E, \omega) = 0$. Mamy wówczas $\mu(E, \omega) = v(E, \omega)$, co wynika z nierówności (1).

2° $v(E, \omega) > 0$ oraz co najmniej jedna z liczb $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest ujemna. Jeżeli np. $\alpha_1 < 0$, wówczas $\mu(p;\ a_1, \ldots, a_1) = 0$ dla każdego $p \in E$, a więc $\mu(E, \omega) = 0$, bo

$$0 \leqslant \mu_n \leqslant \max_{p\in E} \mu(p;\ a_1, \ldots, a_1) = 0 .$$

Zatem w tym przypadku $v(E, \omega) > \mu(E, \omega)$.

3° $v(E, \omega) > 0$ oraz $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k > 1$. Ponieważ w tym przypadku $\omega(p, \infty) = 0$ dla każdego $p \in E$, więc

$$\max_{p\in E} \mu(p;\ \infty, \infty, \ldots, \infty) = 0 ,$$

Za tym

$$0 \leqslant \mu_n \leqslant \max_{p \in E} \mu(p; \infty, \ldots, \infty) = 0$$

czyli

$$\mu(E, \omega) = 0 < v(E, \omega).$$

4° $v(E, \omega) > 0$ oraz $a_1 + \ldots + a_k \leqslant 1$. Wprowadzimy najpierw pojęcie potencjału równowagi oraz pojęcie pojemności zbioru.

Oznaczmy przez $M_E$ klasę miar Radona spełniających warunki

$$\mu(E) = 1, \ \mu(e) = 0 \quad \text{jeśli} \quad e \cap E = 0.$$

Rozważmy całkę

$$I(\mu) = \int_E \int_E \log \frac{1}{\omega(z, \zeta)} d\mu(\zeta) d\mu(z).$$

Można udowodnić (dowód jak w [3]), że istnieje miara $\eta$ realizująca kres dolny $I(\mu)$

$$I = \inf_{\mu \in M_E} I(\mu).$$

Liczbę $C(E, \omega) = e^{-I}$ będziemy nazywać pojemnością zbioru $E$ ze względu na funkcję tworzącą $\omega$, a funkcję

$$u(z) = \int_E \log \frac{1}{\omega(z, \zeta)} d\eta(\zeta)$$

będziemy nazywać potencjałem równowagi ze względu na $\omega$.

Można łatwo udowodnić (dowód jak w [3]), że $u(z) = I$ na $E$ poza zbiorem o pojemności 0. Modyfikując w prosty sposób dowód podany w [4] otrzymujemy stąd

$$\mu(E, \omega) \geqslant C(E, \omega) \geqslant V(E, \omega).$$

Z drugiej strony $\mu(E, \omega) \leqslant V(E, \omega)$ więc $\mu(E, \omega) = V(E, \omega)$. Przypadki 1°-4° wyczerpują wszystkie możliwości. Problem jest więc rozwiązany.

## BIBLIOGRAFIA

[1] F. Leja, *Rozwartość i punkty extremalne zbioru*, Prace Matematyczne I. 1. (1955).
[2] F. Leja, *Teoria funkcji analitycznych*, Warszawa (1957).
[3] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles Thèse*, Lund (1935).
[4] M. Tsuji, *Some metrical theorems on the Fouchsian groups*, Jap. Jour. Math. XIX, 3 (1947).

## SUMMARY

### *On the Ecart and Fekete's Radius of the Set*

The author gives a solution of Leja's problem (1) about the ecart and the radius of Fekete of the set with respect to the function $|z-\zeta|/|h(z)\cdot h(\zeta)|$ where $h(z) = (z-a_1)^{\alpha_1} \dots (z-a_n)^{\alpha_n}$.



## СОДЕРЖАНИЕ

### *О ширине и радиусе Фекете множества*

Автор представляет решение проблемы Ф. Леи (1) о равенстве радиуса Фекете и ширине множества по отношению к образующей функции вида:

$$\omega(z, \zeta) = \frac{|z-\zeta|}{|p(z)p(\zeta)|},$$

где

$$p(z) = (z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2} \dots (z-a_n)^{\alpha_n}.$$