

Władysław Bach

Uwaga o wielomianach Lagrange'a

Niech $\omega(z, \zeta)$ będzie dowolną funkcją tworzącą, tj. funkcją określoną i ciągłą dla każdej pary punktów z, ζ płaszczyzny oraz spełniającą warunki:

$$\omega(z, \zeta) \geq 0, \quad \omega(z, z) = 0, \quad \omega(z, \zeta) = \omega(\zeta, z).$$

Niech $\zeta^{(n)} = \{\zeta_0^{(n)}, \zeta_1^{(n)}, \dots, \zeta_n^{(n)}\}$ $n = 1, 2, \dots$ będzie ciągiem trójkątnym punktów różnych między sobą. Załóżmy, że

$$\omega(\zeta_j^{(n)}, \zeta_k^{(n)}) \neq 0 \quad \text{dla} \quad j \neq k, \quad n = 1, 2, \dots$$

Rozważmy „pseudowielomiany“ Lagrange'a postaci

$$L^{(j)}(z, \zeta^{(n)}) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{\omega(z, \zeta_k^{(n)})}{\omega(\zeta_j^{(n)}, \zeta_k^{(n)})}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

(w przypadku gdy $\omega(z, \zeta) = |z - \zeta|$, $L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})$ są modułami wielomianów Lagrange'a) i oznaczmy przez $M_n(z, r, \zeta^{(n)})$ największy spośród tych iloczynów $L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})$, $j = 0, 1, \dots, n$ dla których punkt $\zeta_j^{(n)}$ leży w kole $K(z, r)$ o środku w punkcie z i o promieniu r . Gdy żaden z punktów $\zeta_0^{(n)}, \zeta_1^{(n)}, \dots, \zeta_n^{(n)}$ nie leży w kole $K(z, r)$ przyjmijmy $M_n(z, r, \zeta^{(n)}) = 0$.

Wiadomo [1], że jeżeli $\omega(z, \zeta) = |z - \zeta|$ i jeżeli z_0 jest punktem skupienia ciągu trójkątnego $\zeta^{(n)}$ wówczas zachodzi nierówność

$$(1) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n(z_0, r, \zeta^{(n)})} \geq 1.$$

Prof. F. Leja postawił zagadnienie: czy nierówność (1) pozostaje prawdziwa w przypadku ogólniejszej funkcji tworzącej?

W niniejszej nocie podamy przykład funkcji tworzącej i ciągu $\zeta^{(n)}$, dla których nierówność (1) nie zachodzi.

Niech $\omega(z, \zeta) = |z - \zeta|(|z| + |\zeta|)$ i niech $\zeta_j^{(n)} = \frac{e^{2\pi i j}}{n}$ dla $j = 0, 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$ $\zeta_j^{(n)}$ są, jak łatwo zauważyć, wierzchołkami wieloboku foremego, wpisanego w okrąg $|z| = \frac{1}{n}$. Wobec tego łatwo udowodnić, że

$$\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \omega(\zeta_j^{(n)}, \zeta_k^{(n)}) = \frac{(n+1)2^n}{n^{2n}} \quad \text{oraz} \quad \omega(0, \zeta_j^{(n)}) = \frac{1}{n^2}$$

dla $j = 0, 1, \dots, n$. Stąd $M_n(0, 1, \zeta^{(n)}) = \frac{1}{2^n n + 1}$ czyli

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n(0, 1, \zeta^{(n)})} = \frac{1}{2}.$$

Udowodnimy jednak

Twierdzenie. Jeżeli $\omega(z, \zeta) = |z - \zeta|^a \omega_1(z, \zeta)$, gdzie $a > 0$ i $\omega_1(z, \zeta)$ jest funkcją jednostajnie ciąglą w całej płaszczyźnie oraz $\omega_1(z, \zeta) \geq a > 0$, wówczas zachodzi nierówność (1).

Dowód. Niech ε i r będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Ze względu na założenie istnieje liczba $r_1 > 0$ ($r_1 < r$) taka, że

$$(2) \quad \frac{\omega_1(z, \zeta)}{\omega_2(z, \zeta)} > 1 - \varepsilon \quad \text{dla} \quad z_1, z_2 \in K(z_0, r_1) \text{ i dowolnego } \zeta.$$

Z definicji $M_n(z, r, \zeta^{(n)})$ oraz z (2) wynika że

$$M_n(z_0, r, \zeta^{(n)}) \geq M_n(z_0, r_1, \zeta^{(n)}) \geq (1 - \varepsilon)^n \max_{(j)} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \left| \frac{z_0 - \zeta_k^{(n)}}{\zeta_j^{(n)} - \zeta_k^{(n)}} \right|^a.$$

Na podstawie [1] mamy $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n(z_0, r, \zeta^{(n)})} > 1 - \varepsilon$ a więc wobec dowolności liczby dodatniej ε otrzymujemy stąd nierówność (1). c. b. d. o.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. Leja et Z. Opial, *Un lemme sur les polynômes de Lagrange*. Ann. Pol. Math. T. II (1955) str. 73—76.

SUMMARY

A Note on Polynomials of Lagrange

The paper gives a negative answer to the question of professor Leja: does the lemma discussed in the paper (1) remain true when the distance $|z - \zeta|$ of points is substituted

by an arbitrary generating function $w(z, \zeta)$. The paper also gives a more general set of generating functions than $|z-\zeta|$ for which however the lemma remains true.

СОДЕРЖАНИЕ

К вопросу о многочленах Лагранжа

Работа дает отрицательный ответ на поставленный проф. Лесей вопрос: Остается ли приведенная в работе (1) лемма справедливой в случае, если расстояние $|z-\zeta|$ пунктов будет заменено любой образующей функцией $\omega(z, \zeta)$.

Сверх того в работе приведен некоторый, более общий чем $|z-\zeta|$ класс образующих функций, для которых, однако, лемма остается справедливой.