

Bogdan Choczewski (Gliwice) i Mirosław Krzyżański (Kraków)

O równaniu dyfuzji pod działaniem siły zewnętrznej i o równaniu Kolmogorowa

Wstęp

§ 1. W niniejszej pracy zajmiemy się zagadnieniem dyfuzji pod działaniem siły zewnętrznej, tzn. dyfuzji zachodzącej w zbiorze cząstek, które oprócz zderzeń przypadkowych podlegają działaniu siły zewnętrznej $f(x)$ (gdzie x jest odcięta rozważanej cząstki). Będziemy rozważali to zagadnienie z punktu widzenia teorii procesów stochastycznych.

Zagadnienie dyfuzji pod działaniem siły zewnętrznej było przedmiotem badań polskiego fizyka Mariana Smoluchowskiego; badania te nosiły charakter eksperymentalny i teoretyczny. Spośród prac Smoluchowskiego, zawierających wyniki tych badań, szczególnie ważne dla rozważań niniejszej pracy są [10], [11] i [12]. Z zagadnieniami w nich omawianymi wiąże się bogata problematyka matematyczna, której autor poświęca wiele uwagi, przedstawiając interesujące rozwiązania. Na wstępie przytoczymy niektóre z wyników zawartych w pracach [10] i [11].

Niech $W(x, y, t)$ będzie gęstością rozkładu prawdopodobieństwa dla odciętej w chwili $t_0 + t$ tej cząstki, która w chwili początkowej t_0 miała odcięta x . Z tego określenia funkcji $W(x, y, t)$ wynika, że jest to funkcja przyrostu czasu i że wobec tego mamy do czynienia z *procesem stochastycznym jednorodnym ze względu na czas*. Funkcja $W(x, y, t)$ spełnia następujące równanie całkowo-funkcyjne

$$(1) \quad W(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, s, \tau) W(s, y, t - \tau) ds,$$

gdzie τ jest dowolną liczbą przedziału $(0, t)$. Równanie (1) w literaturze matematycznej nosi nazwę *równania Smoluchowskiego*¹⁾ (por. [10] i [11]).

¹⁾ W. Feller nazywa je równaniem Chapmana-Smoluchowskiego (por. [4]). Równanie to bywa również nazywane uogólnionym równaniem Markowa (por. B. Gnienenko [6]).

Dla dostatecznie małych wartości zmiennej τ Smoluchowski (por. [11]) przyjął następujący wzór przybliżony na funkcję $W(x, y, \tau)$

$$(2) \quad W(x, y, \tau) = (4\pi D\tau)^{-1/2} \cdot \exp\left\{-\frac{[y-x-\beta\tau f(x)]^2}{4D\tau}\right\},$$

gdzie β i D są stałymi, mianowicie β jest współczynnikiem „ruchliwości“ cząstek, a D współczynnikiem dyfuzji.

Wychodząc ze wzorów (1) i (2) Smoluchowski otrzymał graniczną gęstość rozkładu w przypadku $f(x) = -a \cdot x$ (siła sprężysta) w postaci

$$(3) \quad W(x, y, t) = \left\{\frac{2\pi D[1 - \exp(-2\gamma t)]^{-1/2}}{\gamma}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma[y-xe^{-\gamma t}]^2}{2D(1-e^{-2\gamma t})}\right\},$$

gdzie $\gamma = a\beta$. W tym celu podzielił on okres czasu t na odstępów częściowych τ , przy czym $n\tau = t$, na $W(x, y, \tau)$ przyjął wyrażenie (2) (kładąc $f(x) = -a \cdot x$) i obliczał ze wzoru (1) kolejno $W(x, y, 2\tau)$, $W(x, y, 3\tau)$, ... , $W(x, y, n\tau)$. Funkcję $W(x, y, t)$ w postaci (3) otrzymał jako granicę $W(x, y, n\tau)$ gdy $\tau \rightarrow 0$, $n\tau = t$ (por. [10]).

W pracy [11] Smoluchowski podał na funkcję $W(x, y, t)$ równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych

$$(4) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial}{\partial y} [f(y) \cdot W],$$

uzyskane niezależnie od wzoru (2), na drodze rozważań o charakterze makroskopowym.

W niniejszej pracy udowodnimy, że funkcja graniczna rozkładu $G(x, y, t)$ dla ciągu procesów stochastycznych z czasem dyskretnym¹⁾, w których gęstość rozkładu dla odstępów czasu τ wyraża się wzorem (2), spełnia równanie

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta f(x) \frac{\partial u}{\partial x}$$

przy pewnych założeniach o funkcji $f(x)$, które później wyszczególnimy.

Zauważmy, że jeśli funkcja $G(x, y, t)$ spełnia równanie (5), to spełnia je także graniczna gęstość rozkładu $W(x, y, t) = U'_y(x, y, t)$, jako funkcja zmiennych x i t . Stąd zaś wynika, że jako funkcja zmiennych y i t czyni ona zadość równaniu (4), gdyż (4) i (5) są to odpowiednio pierwsze i drugie równania Kołmogorowa dla rozważanego przez nas procesu granicznego (por. [7], [4], a także [6], str. 247—253).

¹⁾ To znaczy takich procesów, w których funkcja $G(x, y, t)$ jest określona jedynie w zbiorze przeliczalnym i rozproszonym (bez punktów skupienia) wartości argumentu t (przy $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$). Por. M. Fisz [5], str. 236.

W dowodzie tego twierdzenia będziemy się opierać na twierdzeniu, podanym przez A. Chinczyna w monografii [1], str. 36—43, przy czym zastosowanie tego twierdzenia będzie wymagało dowodu pewnych twierdzeń, dotyczących rozwiązań równań o pochodnych cząstkowych typu parabolicznego. Twierdzenia te udowodnimy w pierwszej części pracy.

Pewne własności rozwiązań równań parabolicznych

§ 2. Niech Σ będzie strefą, określoną nierównościami $-\infty < x < +\infty$, $0 < t \leq T$, gdzie T jest liczbą dodatnią. Dla uproszczenia sformułowań twierdzeń w tym i w dalszych paragrafach pracy przyjmijmy następującą definicję.

Będziemy mówili, że dana funkcja jest klasy B^k w danym zbiorze, jeżeli jest ona w tym zbiorze ciągła i ograniczona wraz ze swymi pochodnymi (wzgl. pochodnymi cząstkowymi do rzędu k).

Niech

$$(6) \quad a(x, t)u''_{xx} + b(x, t)u'_x + c(x, t)u - u_t = 0$$

będzie równaniem parabolicznym jednorodnym, w którym współczynnik $a(x, t)$ jest klasy B^3 w strefie Σ , przy czym $a(x, t) > a_0$ dla $(x, t) \in \Sigma$, gdzie a_0 jest liczbą dodatnią, a współczynniki $b(x, t)$ i $c(x, t)$ są klasy B^1 w tej strefie. Przy tych założeniach istnieje rozwiązanie podstawowe $U(x, t; y, s)$ równania (6), to znaczy funkcja określona i ciągła dla $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $0 \leq s < t \leq T$, posiadająca w tym zbiorze ciągłe pochodne U'_x , U''_{xx} , U'_t i spełniająca równanie (6), jako funkcja punktu (x, t) oraz posiadająca własność następującą: dla każdej funkcji $\varphi(y)$, ciągłej dla $-\infty < y < +\infty$ i równej zero poza pewnym przedziałem (y_0, y_1) (zależnym od tej funkcji) zachodzi równość

$$\lim_{\substack{t \rightarrow s \\ x \rightarrow x_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t; y, s) \varphi(y) dy = \varphi(x_0).$$

Ponadto dowodzi się, że jako funkcja punktu (y, s) , spełnia ono równanie

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ a(y, s) \frac{\partial z}{\partial y} - \left[b(y, s) - \frac{\partial a}{\partial y} \right] z \right\} + \frac{\partial z}{\partial s} + c(y, s)z = 0,$$

jest nieujemne i zmierza do zera, gdy $x \rightarrow \infty$ (przy ustalonym y) lub $y \rightarrow \infty$ (przy ustalonym x) jednostajnie dla $0 \leq s < t \leq T$ (por. W. Feller [4], F. G. Dressel [2])¹⁾.

¹⁾ Rozwiązanie podstawowe o powyższych własnościach istnieje zresztą przy słabszych założeniach. por. cytowane prace.

Przy wyszczególnionych wyżej założeniach o współczynnikach równania (6) zachodzą nierówności Eidelmanna (por. [3]):

$$(7) \quad \left| \frac{\partial^r}{\partial x^r} U(x, t; y, s) \right| \leq \mathcal{M}(t-s)^{-r/2} \cdot \mathcal{U}(x, \theta t; y, \theta s) \quad \text{dla } r = 0, 1, 2.$$

(przy $r = 0$ symbol $\frac{\partial^r U}{\partial x^r}$ oznacza samą funkcję U), gdzie \mathcal{M} i θ są liczbami stałymi dodatnimi, a $\mathcal{U}(x, t; y, s)$ jest to rozwiązanie podstawowe równania przewodnictwa cieplnego $u''_{xx} - u'_t = 0$, to znaczy

$$\mathcal{U}(x, t; y, s) = [4\pi(t-s)]^{-1/2} \cdot \exp \left[-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)} \right].$$

Udowodnimy twierdzenie następujące:

Twierdzenie 1. Niech $\varphi(x)$ będzie funkcją ograniczoną dla $-\infty < x < +\infty$ i całkowalną w sensie Riemanna w każdym przedziale właściwym. Wówczas 1° funkcja

$$(8) \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t; y, s) \varphi(y) dy$$

jest w strefie Σ rozwiązaniem równania (6) ograniczonym, ciągłym wraz z pochodnymi u'_x , u''_{xx} , u'_t i spełniającym w każdym punkcie x_0 , w którym funkcja $\varphi(x)$ jest ciągła, warunek

$$(9) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0}} u(x, t) = \varphi(x_0),$$

2° jest to jedyne rozwiązanie równania (6) o wyszczególnionych wyżej własnościach.

Dowód ¹⁾. Pierwsza część twierdzenia wynika z twierdzeń § 2 pracy W. Feller'a [4], przy czym dowód, że zachodzi równość (9) w każdym punkcie ciągłości funkcji $\varphi(x)$ przebiega podobnie jak dowód twierdzenia Weierstrassa (por. [8] ust. 56. 3), jeżeli uwzględnimy równości (57) z [4] lub oszacowanie (7). Pozostaje udowodnić drugą część twierdzenia, tzn. jednoznaczność rozwiązania o własnościach wyszczególnionych w części pierwszej.

Niech $u_1(x, t)$ i $u_2(x, t)$ będą dwoma takimi rozwiązaniami i niech $\bar{u}(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$. Funkcja $\bar{u}(x, t)$ jest w strefie Σ rozwiązaniem równania (6) ciągłym wraz z pochodnymi \bar{u}'_x , \bar{u}''_{xx} , \bar{u}'_t , ograniczonym i zmierzającym do zera przy $t \rightarrow 0$ w każdym punkcie ciągłości funkcji $\varphi(x)$. Ponieważ funkcja ta jest całkowalna w sensie Riemanna w każdym

¹⁾ Obie części tego twierdzenia można otrzymać, jako proste wnioski ze znanych twierdzeń (por. np. L. Słobodecki [13], str. 248); podajemy jednak bezpośredni dowód dla udogodnienia Czytelnikowi lektury niniejszej pracy.

przedziale właściwym, więc zbiór jej punktów nieciągłości w każdym takim przedziale ma miarę Lebesgue'a zero (por. S. Saks [9], str. 144, tw. 10).

Niech s będzie liczbą z przedziału $(0, T)$. Wówczas w strefie $-\infty < x < +\infty$, $s \leq t \leq T$ funkcja

$$\tilde{u}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t; y, s) \bar{u}(y, s) dy$$

spełnia równanie (6) i warunek $\tilde{u}(x, s) = \bar{u}(x, s)$ i jest to równocześnie jedyne rozwiązanie o powyższych własnościach ograniczone w Σ (por. W. Feller [4], § 2), zatem $\tilde{u}(x, t) = \bar{u}(x, t)$, tzn.:

$$(10) \quad \bar{u}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t; y, s) \bar{u}(y, s) dy.$$

Ustalmy punkt $(x, t) \in \Sigma$. Całka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}(x, t; y, s) dy$$

jest zbieżna i to (przy ustalonym x) jednostajnie ze względu na t i s dla $0 \leq s < t \leq T_0$, gdzie T_0 jest dowolną liczbą dodatnią (por. [8], ust. 56.1). Z nierówności (7) przy $r = 0$ wynika, że tę samą własność ma całka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t; y, s) dy \quad \text{dla} \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq s < t \leq T.$$

Można więc do dowolnej liczby $\varepsilon' > 0$ dobrać taką liczbę $R > 0$, żeby zachodziła nierówność

$$\int_{|y-x|>R} U(x, t; y, s) dy < \varepsilon'.$$

Funkcja $\bar{u}(x, t)$ jest ograniczona, więc istnieje liczba $M_0 > 0$ taka, że $|\bar{u}(x, t)| \leq M_0$ w strefie Σ i wobec tego zachodzi nierówność

$$(11) \quad \left| \int_{|y-x|>R} U(x, t; y, s) \bar{u}(y, s) dy \right| \leq M_0 \varepsilon' \quad \text{dla} \quad 0 \leq s < t \leq T.$$

Weźmy pod uwagę ciąg $\{s_n\}$ wartości zmiennej s , zmierzający do zera, gdy $n \rightarrow \infty$ i niech $s_n < t$. Ciąg $\{U(x, t; y, s_n) \bar{u}(y, s_n)\}$ jest wówczas ograniczony dla $-\infty < y < +\infty$ i zmierza do zera prawie wszędzie w przedziale $|y-x| \leq R$. Stąd i z twierdzenia Lebesgue'a (por. S. Saks [9], str. 125) wynika równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|y-x| \leq R} U(x, t; y, s_n) \bar{u}(y, s_n) dy = 0$$

i wobec tego do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać taką liczbę $N > 0$, by zachodziła dla $n > N$ nierówność

$$(12) \quad \left| \int_{|y-x| \leq R} U(x, t; y, s_n) \bar{u}(y, s_n) dy \right| < \varepsilon/2.$$

Obierzmy $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M_0}$. Wówczas z nierówności (11) i (12) wynika, że dla $n > N$ zachodzi nierówność

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t; y, s_n) \bar{u}(y, s_n) dy \right| < \varepsilon.$$

Mamy zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t; y, s_n) \bar{u}(y, s_n) dy = 0.$$

Stąd i z równości (10) wynika, że $\bar{u}(x, t) = 0$, a że (x, t) był dowolnym punktem strefy Σ , więc funkcja $\bar{u}(x, t)$ znika w tej strefie łożsamościowo i funkcje $u_1(x, t)$ i $u_2(x, t)$ są identyczne.

Twierdzenie zostało więc udowodnione całkowicie.

§ 3. Niech $\varphi(x)$ będzie funkcją spełniającą założenia, wyszczególnione w twierdzeniu 1, a $\{\varphi_n(x)\}$ ciągiem funkcji ciągłych dla $-\infty < x < +\infty$, zmiernających do funkcji $\varphi(x)$ i wspólnie ograniczonych, tzn. takich, że

$$(13) \quad |\varphi_n(x)| \leq M \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots$$

gdzie M jest pewną liczbą dodatnią. Udowodnimy następujące

Twierdzenie 2. Jeżeli $\{u_n(x, t)\}$ jest ciągiem rozwiązań równania (6) ciągłych w domknięciu $\bar{\Sigma}$ strefy Σ i spełniających warunki początkowe

$$u_n(x, 0) = \varphi_n(x) \quad \text{dla} \quad -\infty < x < +\infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

a $u(x, t)$ jest rozwiązaniem równania (6) spełniającym warunek (9), to zachodzi równość $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = u(x, t)$.

Dowód. Przy $0 < t \leq T$ funkcję $u_n(x, t)$ przedstawia wzór

$$u_n(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t; y, 0) \varphi_n(y) dy \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots$$

(por. § 2). Ustalmy punkt $(x, t) \in \Sigma$. Z nierówności (13) i z ograniczoneści funkcji $\varphi(x)$ wynika, że dla dowolnego $R > 0$ zachodzą nierówności

$$(14) \quad \left| \int_{|y-x| > R} U(x, t; y, 0) \varphi_n(y) dy \right| \leq M \int_{|y-x| > R} U(x, t; y, 0) dy$$

dla $n = 1, 2, \dots$,

$$\left| \int_{|y-x| > R} U(x, t; y, 0) \varphi(y) dy \right| \leq M \int_{|y-x| > R} U(x, t; y, 0) dy,$$

gdzie M jest kresem górnym funkcji $|\varphi(x)|$ dla $-\infty < x < +\infty$. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Z nierówności (7) dla $r = 0$ i (14) wynika, że można dobrać liczbę R tak, żeby zachodziły nierówności

$$(15) \quad \left| \int_{|y-x|>R} U(x, t; y, 0) \varphi_n(y) dy \right| < \varepsilon/4 \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots,$$

$$\left| \int_{|y-x|>R} U(x, t; y, 0) \varphi(y) dy \right| < \varepsilon/4.$$

Natomiast z założeń uczynionych o ciągu $\{\varphi_n(x)\}$ i wspomnianego w § 2 twierdzenia Lebesgue'a wynika równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|y-x| \leq R} U(x, t; y, 0) \varphi_n(y) dy = \int_{|y-x| \leq R} U(x, t; y, 0) \varphi(y) dy,$$

można więc dobrać liczbę N tak, by zachodziła dla każdego $n > N$ nierówność

$$(16) \quad \left| \int_{|y-x| \leq R} U(x, t; y, 0) [\varphi_n(y) - \varphi(y)] dy \right| < \varepsilon/2.$$

Z nierówności (15) i (16) i z twierdzenia 1 wynika, że dla $n > N$ zachodzi nierówność

$$|u_n(x, t) - u(x, t)| < \varepsilon,$$

czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = u(x, t)$. c. b. d. o.

§ 4. W dalszym ciągu, dla uproszczenia rozważań i rachunków, będziemy się zajmować równaniem postaci

$$(17) \quad Au''_{xx} + b(x)u'_x + c(x)u - u_t = 0,$$

gdzie A jest liczbą stałą, $b(x)$ jest klasy B^2 , $c(x)$ jest klasy B^1 . Niech $\varphi(x)$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną dla $-\infty < x < +\infty$. Wtedy w strefie Σ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie ograniczone i ciągłe równania (17) spełniające warunek początkowy

$$(18) \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{dla } -\infty < x < +\infty$$

(por. § 2). Udowodnimy następujące

Twierdzenie 3. *Jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcją klasy B^2 , to rozwiązanie $u(x, t)$ równania (17), ciągłe i ograniczone w strefie Σ i spełniające warunek (18), posiada pochodne $u'_x(x, t)$ i $u''_{xx}(x, t)$ ciągłe i ograniczone w tej strefie.*

Dowód. Funkcja

$$V(x, t; y, s) = [4\pi A(t-s)]^{-1/2} \cdot \exp \left[-\frac{(x-y)^2}{4A(t-s)} \right]$$

jest rozwiązaniem podstawowym równania

$$Au''_{xx} - u'_t = 0.$$

Przy pomocy prostych rachunków (por. ust. 64.5 i 65.11 w książce [8]) stwierdzamy, że funkcja

$$(19) \quad \bar{V}(x, t; y, s) = V(x, t; y, s) \cdot \exp\left\{\frac{1}{2A} \cdot [B(y) - B(x)]\right\},$$

gdzie $B(x)$ jest dowolną pierwotną funkcji $b(x)$, jest rozwiązaniem podstawowym równania

$$(20) \quad A[u] \equiv Au''_{xx} + b(x)u'_x + \bar{c}(x)u - u'_t = 0,$$

gdzie $\bar{c}(x) = \frac{1}{4A} \cdot [b(x)]^2 + \frac{1}{2} \cdot b'(x)$.

Ponieważ, dzięki ograniczonosci funkcji $b(x)$, zachodzi nierówność

$$|B(x) - B(y)| \leq B_0|x - y|,$$

gdzie $B_0 = \sup |B'(x)| = \sup |b(x)|$, więc mamy

$$\frac{1}{2A} [B(y) - B(x)] \leq \frac{B_0}{2A} |x - y| \leq \frac{(x - y)^2}{4A^2} + \frac{B_0^2}{4}.$$

Jeżeli \bar{t} jest liczbą dodatnią dostatecznie małą, to otrzymujemy stąd dla $0 \leq s < t \leq \bar{t}$ nierówność

$$\begin{aligned} -\frac{(x - y)^2}{4A(t - s)} + \frac{1}{2A} [B(y) - B(x)] &\leq -\frac{(x - y)^2}{4A(t - s)} \left(1 - \frac{t - s}{A}\right) + \\ &+ \frac{B_0^2}{4} \leq -\frac{(x - y)^2}{8A(t - s)} + \frac{B_0^2}{4}. \end{aligned}$$

Stąd i ze wzoru (19) wynika nierówność

$$(21) \quad \bar{V}(x, t; y, s) \leq K \cdot V(x, 2t; y, 2s) \quad \text{dla} \quad 0 \leq s < t \leq \bar{t},$$

gdzie $K = \sqrt{2} \exp(B_0^2/4)$.

Równanie (17) przedstawmy w postaci

$$(22) \quad A[u] + \gamma(x) \cdot u = 0,$$

gdzie funkcja $\gamma(x) = c(x) - \bar{c}(x)$ jest, wobec założeń o funkcji $b(x)$, klasy B^1 . Z końcowej uwagi § 2 pracy W. Fellera [4] wynika, że funkcja $u(x, t)$ spełnia równanie całkowe

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}(x, t; y, 0) \varphi(y) dy - \int_0^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}(x, t; y, s) \gamma(y) u(y, s) dy.$$

Stosując różniczkowanie pod znakiem całki (por. [8] ust. 56.2 i 63.5), otrzymujemy równość

(23)

$$u'_x(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}'_x(x, t; y, 0)\varphi(y)dy - \int_0^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}'_x(x, t; y, s)\gamma(y)u(y, s)dy.$$

Pierwszą całkę przekształcamy, korzystając z określenia (19) funkcji $\bar{V}(x, t; y, s)$ i przyjmując oznaczenie $q(x, y) = \exp\{1/2A \cdot [B(y) - B(x)]\}$, w następujący sposób

$$(24) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}'_x(x, t; y, 0)\varphi(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} V'_x(x, t; y, 0)q(x, y)\varphi(y)dy - \\ - \frac{1}{2A} \cdot b(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}(x, t; y, 0)\varphi(y)dy.$$

Otóż $V'_x = -V'_y$ i wobec tego całkując przez części i korzystając z nierówności (21) otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V'_x(x, t; y, 0)q(x, y)\varphi(y)dy = - \int_{-\infty}^{+\infty} V'_y(x, t; y, 0)q(x, y)\varphi(y)dy = \\ = - \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} V'_y(x, t; y, 0)q(x, y)\varphi(y)dy = \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} [-\bar{V}(x, t; y, 0)\varphi(y) \Big|_{y=-\epsilon}^{y=\epsilon}] + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}(x, t; y, 0)[\varphi'(y) + \frac{1}{2A} \cdot \varphi(y) \cdot b(y)]dy,$$

czyli ostatecznie

$$(25) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}'_x(x, t; y, 0)\varphi(y)dy = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}(x, t; y, 0)\{\varphi'(y) + \frac{1}{2A} [b(y) - b(x)]\varphi(y)\}dy.$$

Z równości (23) i (25) wynika wzór

$$(26) \quad u'_x(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}(x, t; y, 0)\varphi(y)dy - \\ - \int_0^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}'_x(x, t; y, s)\gamma(y)u(y, s)dy,$$

gdzie $\varphi(y) = \varphi'(y) + \frac{1}{2A} \cdot \varphi(y)[b(y) - b(x)]$ jest funkcją klasy B^1 .

