ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

Nr 38 PRACE MATEMATYCZNE ZESZYT 6 1961

*Bolesław Szafirski*

# O zastosowaniu norm Quasi-Czebyszewa do konstrukcji funkcji ekstremalnej F. Leji

Niech $E$ będzie zbiorem domkniętym i ograniczonym punktów płaszczyzny $\Pi$, $f(z)$ funkcją rzeczywistą i ciągłą na $E$. Przez $a^{(n)} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ oznaczmy dowolny układ $n$ punktów płaszczyzny. Utwórzmy wyrażenie

$$W_n(z) = W_n(z, a^{(n)}, f) = \prod_{i=1}^{n} (z - a_i) e^{-nf(z)}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

oraz

$$\mu_n = \inf_{a^{(n)} \in \Pi} \max_{z \in E} |W_n(z, a^{(n)}, f)| = \max_{z \in E} |W_n(z, c^{(n)}, f)|, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

przy czym kres ten jest osiągnięty dla układu $c^{(n)}$ punktów leżących w powłoce wypukłej $H(E)$ zbioru $E$. Klasę funkcji określonych wzorem (1) oznaczać będziemy przez $W$. Wielomian

$$T_n(z) = T_n(z, E, f) = e^{nf(z)} W_n(z, c^{(n)}, f), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

nazywamy *$n$-tym wielomianem Czebyszewa zbioru $E$ względem funkcji $f$*. Można udowodnić, że dla zbioru $E$ i liczby naturalnej $n$ istnieje dokładnie jeden wielomian $T_n(z)$ wyrażony wzorem (2).

Dowodzi się [1], że istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mu_n} = \mu(E, f)$, oraz jeżeli zbiór $E$ ma średnicę pozaskończoną dodatnią, to w każdym punkcie $CH(E)$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|T_n(z)|}{\mu_n}} = \Phi(z, E, f),$$

oraz

$$\mu(E, f) = \frac{1}{\gamma(E, f)},$$

gdzie $\Phi(z, E, f)$ jest funkcją ekstremalną wprowadzoną przez prof. F. Leję [2], a $\gamma(E, f)$ jest pewną stałą związaną z tą funkcją. Metoda dowodu pozwala wypowiedzieć to twierdzenie w ogólniejszej, pożytecznej dla celów niniejszej noty, formie: Dla każdego ciągu funkcji $W_n(z, a^{(n)}, f)$ spełniającego warunek

$$\lim_{n\to\infty}[\max_{z\in E}|W_n(z, a^{(n)}, f)|]^{1/n} = \mu(E, f)$$

istnieje w zbiorze $CH(E)$ granica

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{|e^{nf(z)}W_n(z, a^{(n)}, f)|}{\max\limits_{z\in E}|W_n(z, a^{(n)}, f)|}\right]^{1/n} = \Phi(z, E, f).$$

Niech $N = N[W_n(z, a^{(n)}, f), E]$ oznacza normę określoną w klasie funkcji $W_n(z)$ na zbiorze $E$. Normę $\max\limits_{z\in E}|W_n(z)|$ nazywamy *normą Czebyszewa* funkcji $W_n(z)$ i będziemy ją oznaczać przez

$$M = M[W_n(z), E] = \max_{z\in E}|W_n(z)|.$$

Normę $N = N[W_n(z), E]$ nazywamy *normą quasi-Czebyszewa* funkcji $W_n(z)$ na zbiorze $E$, jeżeli dla każdej funkcji klasy $W$ spełnione są następujące warunki:

1°. iloraz $\dfrac{N}{M} \leqslant U(E) \leqslant \infty$,

2°. dla każdej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje liczba naturalna $N(\varepsilon)$ taka, że dla $n > N(\varepsilon)$ iloraz $\dfrac{N}{M} \geqslant L_n(E, \varepsilon)$, przy czym istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty}[L_n(E, \varepsilon)]^{1/n} = f(\varepsilon)$ oraz $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}f(\varepsilon) = 1$. Celem niniejszej noty jest udowodnić następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1. *Jeżeli $N = N[W_n(z), E]$ jest normą quasi-Czebyszewa funkcji $W_n(z)$ na zbiorze nieskończonym, domkniętym i ograniczonym $E$ oraz dla każdego $n$ istnieje wśród funkcji klasy $W$ taka funkcja $W_n^*(z)$, dla której $N[W_n^*(z), E]$ jest najmniejsza* [1]*, wówczas istnieją granice:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \mu(E, f), \quad \text{gdzie} \quad a_n = N[W_n^*(z), E], \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n^{1/n} = \mu(E, f), \quad \text{gdzie} \quad \beta_n = M[W_n^*(z), E]. \tag{4}$$

---

[1]) Założenia twierdzenia są spełnione na przykład wtedy, gdy norma quasi-Czebyszewa jest monotoniczna (tzn. dla dwóch funkcji $\widetilde{W}_n(z)$ i $\widetilde{\widetilde{W}}_n(z) \in W$ $N[\widetilde{W}_n(z), E] < N[\widetilde{\widetilde{W}}_n(z), E]$ gdy tylko $|\widetilde{W}_n(z)| < |\widetilde{\widetilde{W}}_n(z)|$ w punktach zbioru $E$, w których $\widetilde{\widetilde{W}}_n(z) \neq 0$, oraz $\widetilde{W}_n(z) = 0$ dla punktów zbioru $E$, w których $\widetilde{\widetilde{W}}_n(z) = 0$) i ciągła (tzn. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takie, że jeżeli $|\widetilde{W}_n(z) - \widetilde{\widetilde{W}}_n(z)| < \delta(\varepsilon)$ na $E$, wówczas $|N[\widetilde{W}_n(z), E] - N[\widetilde{\widetilde{W}}_n(z), E]| < \varepsilon$.

Twierdzenie 2. *Zachowując oznaczenia z twierdzenia* 1, *niech* $W_n^*(z) = (z-a_1^*)(z-a_2^*)\dots(z-a_n^*)e^{-nf(z)}$. *Wówczas w każdym punkcie zbioru* $CH(E)$ *istnieje granica*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(z-a_1^*)\dots(z-a_n^*)}{\beta_n}\right|} = \Phi(z, E, f).$$

W zakończeniu podamy pewne częściowe uogólnienie twierdzenia 1.

Dowód twierdzenia 1. Oznaczmy przez $t_n(z) = t_n(z, E, f)$ taką funkcję klasy $W$, dla której $\mu_n = M[t_n(z), E]$ jest najmniejsza. Wówczas mamy

$$N[t_n(z), E) \leqslant U(E)M[t_n(z), E)] = U(E)\mu_n,$$

skąd

$$a_n = N[W_n^*(z), E] \leqslant U(E)\mu_n.$$

Stąd oraz na podstawie twierdzenia cytowanego na początku wynika, że $\lim\sqrt[n]{\mu_n} = \mu(E, f)$ i że

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \leqslant \mu(E, f). \tag{5}$$

Z drugiej strony z założeń wynika, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna $N(\varepsilon)$ taka, że dla $n > N(\varepsilon)$ spełniona jest nierówność

$$N[W_n^*(z), E]\left(\frac{1}{L_n(E, \varepsilon)}\right) \geqslant M[W_n^*(z), E].$$

Ponieważ $\beta_n \geqslant \mu_n$ $n = 1, 2, \dots$ zatem

$$a_n^{1/n}\left[\frac{1}{L_n(E, \varepsilon)}\right]^{1/n} \geqslant \beta_n^{1/n} \geqslant \mu_n^{1/n}$$

oraz

$$\liminf_{n\to\infty} a_n^{1/n}\left[\frac{1}{f(\varepsilon)}\right] \geqslant \liminf_{n\to\infty}\beta_n^{1/n} \geqslant \mu(E, f)$$

i

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n}\left[\frac{1}{f(\varepsilon)}\right] \geqslant \limsup_{n\to\infty}\beta_n^{1/n} \geqslant \mu(E, f).$$

Przechodząc teraz z $\varepsilon$ do zera otrzymujemy nierówności:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n^{1/n} \geqslant \liminf_{n\to\infty}\beta_n^{1/n} \geqslant \mu(E, f)$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \geqslant \limsup_{n\to\infty}\beta_n^{1/n} \geqslant \mu(E, f).$$

Z tych nierówności oraz z (5) mamy ostatecznie:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n^{1/n} \geqslant \liminf_{n\to\infty}\beta_n^{1/n} \geqslant \mu(E, f) \geqslant \limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \geqslant \limsup_{n\to\infty}\beta_n^{1/n} \geqslant \mu(E, f),$$

skąd wynika teza twierdzenia 1.

Dowód twierdzenia 2. Teza twierdzenia wynika z uwagi wstępnej że zbieżność $\lim\limits_{n\to\infty}[\max\limits_{z\in E}|W_n(z, a^{(n)}, f)|]^{1/n}$ pociąga za sobą w zbiorze $CH(E)$ istnienie granicy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|e^{nf(z)}W_n(z, a^{(n)}, f)|}{\max\limits_{z\in E}|W_n(z, a^{(n)}, f)|}} = \Phi(z, E, f),$$

oraz z wzoru (4).

Twierdzenie 1 można częściowo nieco uogólnić, wykażemy bowiem następujące

Twierdzenie 3. *Niech zbiór $E$ nieskończony, domknięty i ograniczony zawiera rosnący ciąg zbiorów $E_k$ o tej własności, że $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(E_k, f) = \mu(E, f)$. Przez $N[W_n(z), E_k]$ oznaczmy normę quasi-Czebyszewa funkcji $W_n(z)$ na $E_k$ spełniającą dla każdego $k$ warunki:*

$$N[W_n(z), E_k] \leqslant N[W_n(z), E_{k+1}]$$

$$U(E_k) \leqslant U(E_{k+1}) \leqslant U < \infty,$$

*oraz*

$$N[W_n(z), E_k] \leqslant UM[W_n(z), E].$$

*Normę $N[W_n(z), E]$ zdefiniujmy jako granicę*

$$\lim_{k\to\infty} N[W_n(z), E_k] = N[W_n(z), E].$$

*Przypuśćmy, że dla każdego $n$ istnieją funkcje $W_n^*(z, k)$, $W_n^*(z)$ dla których odpowiednio wyrażenia $N[W_n^*(z, k), E_k]$, $N[W_n^*(z), E]$ są najmniejsze. Wówczas istnieje granica*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\{N[W_n^*(z), E]\}^{1/n} = \mu(E, f).$$

Dowód. Z nierówności

$$N[W_n^*(z), E] \geqslant N[W_n^*(z), E_k] \geqslant N[W_n^*(z, k), E_k]$$

i z twierdzenia 1 mamy dla każdego $k$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n^{1/n} \geqslant \mu(E_k, f).$$

Przechodząc z $k$ do nieskończoności otrzymujemy

$$\liminf_{n\to\infty} a_n^{1/n} \geqslant \lim_{k\to\infty}\mu(E_k, f) = \mu(E, f). \tag{6}$$

Jednocześnie przy poprzednio używanych oznaczeniach

$$N[W_n^*(z), E] \leqslant N[t_n(z), E] = \lim_{k\to\infty} N[t_n(z), E_k] \leqslant U\mu_n,$$

skąd

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu_n^{1/n} = \mu(E, f) . \tag{7}$$

Z wzorów (6) i (7) otrzymujemy ostatecznie tezę twierdzenia.

## BIBLIOGRAFIA


[1] J. Siciak, *Pewne zastosowania metody punktów ekstremalnych, w przygotowaniu.*

[2] F. Leja, *Propriétés des points extremaux des ensembles plans et leur application à la représentation conforme*, Ann. Pol. Math. III, 2 (1957), str. 319—342.


## SUMMARY


### *On Applying Quasi-Tchebycheff Norms to the Construction of Extreme Function of F. Leja*

The paper considers a set of functions $W_n(z, a^{(n)}, f) = \prod_{i=1}^{n} (z-a_i) e^{-nf(z)}$ in set $E$ closed and bounded. It is proved that for an arbitrary quasi-Tchebycheff norm $N$ exists a limit in the set $CH(E)$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|(z-a_1^*) \ldots (z-a_n^*)|}{\max_{z\in E} |W_n(z, a^{*(n)}, f)|}} = \Phi(z, E, f) ,$$

where $a^{*(n)} = \{a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*\}$ is such a system of $n$ points of plane for which $N[W_n(z, a^{*(n)}, f), E]$ has the smallest value, and $\Phi(z, E, f)$ is the extreme function of Leja.


## СОДЕРЖАНИЕ


### *О применении норм квази-Чебышева для построения экстремальной функции Ф. Леи*

В работе рассматривается класс функции $W_n(z, a^{(n)}, f) = \prod_{i=1}^{n} (z-a_i) e^{-nf(z)}$ в множестве $E$, замкнутом и ограниченном. Доказывается, что для любой нормы $N$ квази- Чебышева в множестве $CH(E)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|(z-a_1^*) \ldots (z-a_n^*)|}{\max_{z\in E} |W_n(z, a^{*(n)}, f)|}} = \Phi(z, E, f) ,$$

где $a^{*(n)} = \{a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*\}$ является такой системой $n$ точек плоскости, для которой $N[W_n(z, a^{*(n)}, f), E]$ имеет минимальное значение, а $\Phi(z, E, f)$ является экстремальной функцией Ф. Леи.