

Bolesław Szafirski

O pewnej funkcji ekstremalnej związanej z rozkładem nieswobodnym punktów ekstremalnych

Niech w dowolnej przestrzeni metrycznej R_m zbiór E będzie sumą dwóch zbiorów niepustych, rozłącznych, domkniętych i ograniczonych $E = E_1 + E'_1$. Punkty tej przestrzeni oznaczać będziemy przez p, q, x, y, \dots . Niech $\omega(x, y)$ oznacza funkcję ciągłą w zbiorze wszystkich par punktów tej przestrzeni, nieujemną, symetryczną, $\omega(p, p) = 0$, $\omega(p, q) \neq 0$, gdy $p \neq q$. Funkcję o tych własnościach nazywać będziemy funkcją tworzącą lub uogólnioną odległością punktów p i q . Oznaczmy przez $p^{(2n)} = \{p_0, p_1, \dots, p_n; p'_0, p'_1, \dots, p'_n\}$ taki układ $2n+2$ punktów zbioru E , że $p_i \in E_1$, $p'_i \in E'_1$ $i = 0, 1, 2, \dots, n$, przez $V(p_0, p_1, \dots, p_n; p'_0, p'_1, \dots, p'_n)$ iloczyn wszystkich wzajemnych uogólnionych odległości punktów układu $p^{(2n)}$ a przez $V_{2n} = V_{2n}(E_1, E'_1)$ krąg górny tego iloczynu, gdy punkty zmieniają się w zbiorze E w ten sposób, że $p_i \in E_1$, $p'_i \in E'_1$ $i = 0, 1, \dots, n$. Można udowodnić, podobnie jak w przypadku, gdy $\omega(p, q) = |p - q|$ ¹⁾ ([1]), że ciąg $v_{2n} = V_{2n}^{2/((2n+2)(2n+1))}$, $n = 1, 2, \dots$, jest zbieżny. Granicę tego ciągu $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{2n} = v(E_1, E'_1, \omega, 1:1)$ nazywamy rozwartością nieswobodną zbioru E ze względu na funkcję tworzącą ω , odpowiadającą rozkładowi w stosunku 1:1. Utwórzmy wyrażenie

$$K_{ij}(p^{2n}) = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \omega(p_i, p_k) \prod_{k=0}^n \omega(p_i, p'_k) \prod_{k=0}^n \omega(p'_j, p_k) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \omega(p'_j, p'_k)}{\omega(p_i, p'_j)},$$

$$i, j = 0, 1, \dots, n$$

oraz położmy

$$(1) \quad K_{2n} = K_{2n}(E_1, E'_1) = \sup_{p_i \in E_1, p'_i \in E'_1 (i=0, \dots, n)} (\min_{(i, j)} K_{ij}(p^{(2n)})).$$

¹⁾ Symbol $|p - q|$ oznacza zwykłą odległość punktów p i q .

Można udowodnić (podobnie jak w [1]), że ciąg $k_{2n} = k_{2n}(E_1, E'_1) = [K_{2n}(E_1, E'_1)]^{1/4n+1}$ $n = 1, 2, \dots$ jest zbieżny i

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_{2n} = v(E_1, E'_1, \omega, 1:1).$$

Z układem punktów $p^{(2n)}$ można związać następujące wyrażenia:

$$(3) \quad L_{ij}(x, y; p^{(2n)}) = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \omega(x, p_k) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \omega(x, p'_k) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \omega(y, p_k) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \omega(y, p'_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \omega(p_i, p_k) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \omega(p_i, p'_k) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \omega(p'_j, p_k) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \omega(p'_j, p'_k)},$$

$$i, j = 0, 1, \dots, n,$$

gdzie x i y są dowolnymi punktami przestrzeni R_m . Oznaczmy przez

$$(4) \quad L_{2n} = L_{2n}(x, y) = \inf_{p_i \in E_1, p'_i \in E'_1 (i=0, \dots, n)} (\max_{(i,j)} L_{ij}(x, y, p^{(2n)})).$$

Wykażemy następujące

Twierdzenie. Jeżeli $v(E_1, E'_1, \omega, 1:1) > 0$, to ciąg $l_{2n} = (L_{2n})^{1/4n}$ ma dla każdej pary (x, y) punktów przestrzeni R_m skończoną granicę

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l_{2n} = L(x, y).$$

Dowód. Najpierw udowodnimy, że dla każdej pary (x, y) punktów przestrzeni R_m zachodzą nierówności

$$L_{2\mu+2\nu}(x, y) \geq c L_{2\mu}(x, y) \cdot L_{2\nu}(x, y) \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots$$

gdzie $c = \frac{\inf_{p \in E_1, p' \in E'_1} \omega(p, p')}{\sup_{\substack{p \in E_1 \\ p' \in E'_1}} \omega(p, p')}$. W tym celu do liczby $\varepsilon > 0$ i wskaźników

$2\mu, 2\nu$ dobierzmy w zbiorze E taki układ $2\mu + 2\nu + 2$ punktów

$$(6) \quad q^{(2\mu+2\nu)} = \{q_0, q_1, \dots, q_\mu, \dots, q_{\mu+\nu}; q'_0, q'_1, \dots, q'_\mu, \dots, q'_{\mu+\nu}\},$$

by $q_i \in E_1, q'_i \in E'_1$ ($i = 0, 1, \dots, \mu + \nu$), oraz by przy ustalonych x, y

$$(7) \quad L_{2\mu+2\nu}(x, y) > \max_{(i,j)} L_{ij}(x, y; q^{(2\mu+2\nu)}) - \varepsilon.$$

Wśród punktów (6) wybierzmy 2ν takich, np. $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_\nu}, q'_{i'_1}, \dots, q'_{i'_\nu}$, by iloczyn $V(x, q_{i_1}, \dots, q_{i_\nu}; y, q'_{i'_1}, \dots, q'_{i'_\nu})$ był możliwie największy. Można założyć, że punktami wybranymi są $q_{\mu+1}, q_{\mu+2}, \dots, q_{\mu+\nu}; q'_{\mu+1}, \dots, q'_{\mu+\nu}$, zatem

$$V(x, q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu}; y, q'_{\mu+1}, \dots, q'_{\mu+\nu}) \geq V(x, q_i, q_{\mu+1}, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_{\mu+\nu}; y, q'_i, q'_{\mu+1}, \dots, q'_{i-1}, q'_{i+1}, \dots, q'_{\mu+\nu})$$

dla każdego $i, j = 0, 1, \dots, \mu, k, l = \mu + 1, \dots, \mu + \nu$. Dzieląc obie strony przez czynniki postaci $\omega(q_\alpha, q_\beta), \omega(q_\alpha, q'_\beta), \omega(q'_\alpha, q_\beta), \omega(q'_\alpha, q'_\beta), \omega(x, y)$ otrzymamy nierówność

$$\frac{1}{\omega(q_i, q'_j)} L_{ij}(x, y; q^{(2\nu)}) \geq \frac{1}{\omega(q_k, q'_l)} L_{kl}(x, y; q^{(2\nu)})$$

gdzie $q^{(2\nu)} = \{q_i, q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu}; q'_j, q'_{\mu+1}, \dots, q'_{\mu+\nu}\}$, zachodząca dla $k = i, \mu + 1, \dots, \mu + \nu, l = j, \mu + 1, \dots, \mu + \nu$, z której wynika, że

$$L_{ij}(x, y; q^{(2\nu)}) \geq c L_{kl}(x, y; q^{(2\nu)}).$$

Na mocy (4)

$$L_{ij}(x, y; q^{(2\nu)}) \geq c \cdot \max_{(k,l)} L_{kl}(x, y; q^{(2\nu)}) \geq c L_{2\nu}(x, y) \quad i, j = 0, 1, \dots, \mu.$$

Ponieważ dla $i, j = 0, 1, \dots, \mu$ zachodzi tożsamość:

$$L_{ij}(x, y; q^{(2\mu+2\nu)}) = L_{ij}(x, y; q^{(2\mu)}) \cdot L_{ij}(x, y; q^{(2\nu)}),$$

gdzie

$$q^{(2\mu)} = \{q_0, q_1, \dots, q_\mu; q'_0, \dots, q'_\mu\}, \quad q^{(2\nu)} = \{q_i, q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu}; q'_i, q'_{\mu+1}, \dots, q'_{\mu+\nu}\},$$

zatem

$$L_{ij}(x, y; q^{(2\mu+2\nu)}) \geq L_{ij}(x, y; q^{(2\mu)}) \cdot c L_{2\nu}(x, y);$$

skąd

$$\begin{aligned} \max_{(i,j)} L_{ij}(x, y; q^{(2\mu+2\nu)}) &\geq \max_{(i,j)} L_{ij}(x, y; q^{(2\mu)}) c L_{2\nu}(x, y) \geq \\ &\geq c L_{2\mu}(x, y) L_{2\nu}(x, y), \end{aligned}$$

a stąd na mocy (7)

$$L_{2\mu+2\nu}(x, y) + \varepsilon \geq c L_{2\mu}(x, y) L_{2\nu}(x, y).$$

Istnienie granicy (5) skończonej lub nieskończonej wynika z wykazanej nierówności oraz z następującego lematu¹⁾: jeżeli ciąg liczb dodatnich $\{a_n\}$ spełnia warunek $a_{\mu+\nu} \leq c a_\mu a_\nu$ dla $\mu, \nu = 1, 2, \dots$, gdzie c jest stałą dodatnią, to istnieje skończona granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, a jeśli spełnia warunek $a_{\mu+\nu} \geq c a_\mu a_\nu$ dla $\mu, \nu = 1, 2, \dots$ gdzie c jest stałą dodatnią, to istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ skończona lub nieskończona.

Wykażemy teraz, że granica (5) dla każdej pary (x, y) jest skończona. Ponieważ $\lim k_{2n} = v(E_1, E'_1; \omega, 1:1) > 0$ więc istnieje taka liczba N ,

¹⁾ Dowód lematu w przypadku $c = 1$ jest zamieszczony w [2]. Dowód niniejszego lematu przebiega analogicznie.

że gdy oznaczymy $\delta = \frac{v(E_1, E'_1; \omega, 1:1)}{2}$ to $k_{2n} > \delta$ dla $n > N$. Z drugiej strony w myśl (1) dla każdego n istnieje taki układ $p^{(2n)}$ punktów zbioru E , że

$$K_{2n} < \min_{(i,j)} K_{ij}(p^{(2n)}) + \varepsilon, \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \delta^{4n+1},$$

zatem

$$(8) \quad \min_{(i,j)} K_{ij}(p^{(2n)}) > \delta^{4n+1} - \frac{1}{2} \delta^{4n+1} = \frac{1}{2} \delta^{4n+1} \quad \text{dla} \quad n > N.$$

Wobec ciągłości funkcji $\omega(p, q)$ istnieje stała $C(x, y)$ taka, że $\omega(x, p) < C(x, y)$ i $\omega(y, p) < C(x, y)$ dla każdego $p \in E$ przy ustalonych x i y . Dzięki nierówności (8) i wzorowi (3) mamy

$$L_{2n}(x, y) \leq \max_{(i,j)} L_{ij}(x, y; p^{(2n)}) \leq \frac{[C(x, y)]^{4n} \frac{(R(x, y))^2}{r}}{\min_{(i,j)} K_{ij}(p^{(2n)})} \leq \frac{2[C(x, y)]^{4n} R(x^2, y)}{r \delta^{4n+1}};$$

gdzie $R(x, y) = \max_{p \in E} (\max_{p \in E} \omega(x, p), \max_{p \in E} \omega(y, p))$, $r = \min_{\substack{p \in E_1 \\ p' \in E'_1}} \omega(p, p')$ i na-

stępnie

$$L(x, y) \leq \frac{C(x, y)}{\delta} = \frac{2C(x, y)}{v(E_1, E'_1; \omega, 1:1)},$$

czego należało dowieść.

Uwaga. Gdy $v(E_1, E'_1; \omega, 1:1) = 0$, to granica (5) również istnieje, lecz może być nieskończona.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. Leja, *Distributions libres et restreintes des points extrémaux dans les ensembles plans*. — Annales Pol. Math. III, 1 (1956).
 [2] F. Leja, *Teoria funkcji analitycznych*. Warszawa 1957.

SUMMARY

On an Extreme Function Connected with Distribution of Extreme Points

Let E be the sum of two sets closed bounded and disjunctive E_1 and E'_1 in an arbitrary metric space R_m . For each positive integer n let us choose in E a system $2n + 2$ of points so that $n + 1$ of them belong to E_1 , and the remaining $n + 1$ belong to E'_1 .

With a so chosen sequence of points of the set E and with the set E one can associate a certain sequence of functions in a certain way. The paper contains the proof that this sequence of functions converges to a finite limit in the Cartesian product of space R_m by itself.

СОДЕРЖАНИЕ

О некоторой экстремальной функции, связанной с несвободным распределением экстремальных точек

Полагаем, что E является суммой двух замкнутых, ограниченных и раздельных множеств E_1 и E'_1 в любом метрическом пространстве R_m . Для каждого натурального числа n избираем в E систему $2n + 2$ точек таким образом, чтобы $n + 1$ из них принадлежало к E_1 , а остальные $n + 1$ принадлежали к E'_1 .

С выбранной таким образом последовательностью систем точек множества E , а также и с множеством E можно связать некоторым образом некую последовательность функций.

Работа включает доказательство сходимости этой последовательности функций к конечному пределу в декартовском произведении пространства R_m на самое себя.