ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
Nr 38 PRACE MATEMATYCZNE ZESZYT 6 1961

Piotr Besala (Gliwice)

O rozwiązaniach równania nieliniowego typu parabolicznego w obszarze nieograniczonym

W pracy tej rozważam problem postawiony przez prof. Krzyżańskiego, dotyczący istnienia i jednoznaczności rozwiązania pierwszego zagadnienia Fouriera (względnie zredukowanego zagadnienia Cauchy'ego, patrz [4] str. 124—126) względem pewnego równania nieliniowego parabolicznego, w klasie funkcji szybko rosnących i w obszarze nieograniczonym. W twierdzeniu o istnieniu zakładamy istnienie rozwiązania odpowiedniego zagadnienia w obszarze ograniczonym.

Twierdzenia I i II, które są przedmiotem tej pracy dotyczą równania o pochodnych cząstkowych, nieliniowego, typu parabolicznego postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}\right). \tag{1}$$

Prawdziwość twierdzenia I wynika — po zastosowaniu twierdzenia o przyrostach funkcji i lematu Hadamarda — z odpowiedniego twierdzenia udowodnionego przez prof. Krzyżańskiego. Następnie podaję wniosek. Dowód twierdzenia II polega na stosowaniu twierdzenia o przyrostach funkcji i lematu Hadamarda oraz wprowadzeniu pewnej modyfikacji dowodu odpowiedniego twierdzenia podanego przez prof. Krzyżańskiego dla równania liniowego (patrz: [2], [3]).

S. D. Ejdelman wykazał poprawność postawienia zagadnienia Cauchy'ego, w dostatecznie cienkiej warstwie, w analogicznej klasie funkcji dla układu parabolicznego równań, lecz prawie — liniowych i przy silniejszych założeniach dotyczących charakteru wzrastania wraz z x i u składnika nieliniowego. W [1] zamieszczone są wyniki jego badań.

Pragnę wyrazić podziękowanie panu profesorowi M. Krzyżańskiemu za przeczytanie rękopisu i cenne wskazówki przy opracowywaniu tego tematu.

§ 1. Niech $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ będzie punktem przestrzeni euklidesowej *m-wymiarowej* $\mathcal{E}^m$, zaś $P(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ lub krótko (x, t) punktem czasoprzestrzeni $m+1$-*wymiarowej* $\mathcal{E}^{m+1}$.

Oznaczmy przez D nieograniczony obszar otwarty przestrzeni $\mathcal{E}^{m+1}$ położony między hiperpłaszczyznami $t = 0$ i $t = T > 0$, którego brzeg składa się z *m-wymiarowych* obszarów nieograniczonych S^0 i S^T położonych na hiperpłaszczyznach $t = 0$ i $t = T$ i z pewnej powierzchni σ niestycznej do żadnej hiperpłaszczyzny $t = \text{const}$.

Niech D_R będzie ograniczonym zbiorem otwartym wyciętym z D powierzchnią walcową Γ_R o równaniu $\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = R^2$. Zakładamy, że istnieje $R_0 > 0$, takie, że dla $R > R_0$ zbiór D_R jest sumą skończonej ilości obszarów ograniczonych, których brzegi składają się z obszarów położonych na hiperpłaszczyznach $t = 0$ i $t = T$ i z pewnych „powierzchni bocznych".

Niech $\bar{D}$ oznacza domknięcie obszaru D.

O funkcji $F(x, t, z, z_1, z_2, \ldots, z_m, z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{mm})$ zakładamy, że:

1° jest określona i ciągła w obszarze

$$\pi\{(x, t) \in \bar{D}, -\infty < z < +\infty, -\infty < z_i < +\infty, -\infty < z_{ik} < +\infty; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

2° posiada w obszarze π ciągłe pochodne pierwszego rzędu względem zmiennych z, z_i, z_{ik} spełniające następujące warunki: istnieją stałe $L_0, L_1, \ldots, L_4$ takie, że w obszarze π zachodzą nierówności

$$\left|\frac{\partial F}{\partial z_{ik}}\right| \leqslant L_0; \quad \left|\frac{\partial F}{\partial z_i}\right| \leqslant L_1|x| + L_2; \quad \frac{\partial F}{\partial z} \leqslant L_3|x|^2 + L_4 \qquad (i, k = 1, \ldots, m),$$

gdzie

$$|x| = \Big(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

3° forma kwadratowa

$$\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial z_{ik}} \lambda_i \lambda_k$$

jest w obszarze π określona dodatnio.

Oznaczmy przez $E_2(M, K)$ lub krótko E_2, klasę funkcji $\psi(x, t)$, dla których istnieją stałe M i K dodatnie i takie, że zachodzi nierówność

$$|\psi(x, t)| \leqslant M \exp(K|x|^2) \quad \text{dla} \quad (x, t) \in D,$$

zaś $Z_\alpha(A, B)$ lub Z_α niech oznacza klasę funkcji $\chi(x, t)$, dla których istnieją stałe dodatnie A, B takie, że zachodzi nierówność

$$|\chi(x, t)| \leqslant A|x|^\alpha + B \quad \text{dla} \quad (x, t) \in D.$$

Połóżmy

$$\Sigma = S^0 + \sigma .$$

§ 2. Niech $\varphi(x, t)$ będzie daną funkcją określoną i ciągłą na zbiorze Σ.

Twierdzenie I. Równanie (1) posiada co najwyżej jedno rozwiązanie regularne [1]) i klasy E_2 w obszarze $\bar{D}$ oraz równe $\varphi(x, t)$ na zbiorze Σ.

Dowód. Niech u_1 i u_2 będą dwoma takimi rozwiązaniami. Podstawiając je kolejno do równania (1), odejmując stronami otrzymane związki i stosując twierdzenie o przyrostach funkcji ([4] str. 208) otrzymujemy, że różnica $\bar{u} = u_1 - u_2$ spełnia w obszarze D równanie liniowe jednorodne postaci

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} + c\bar{u} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0 , \tag{2}$$

gdzie współczynniki a_{ik}, b_i, c są pochodnymi $\dfrac{\partial F}{\partial z_{ik}}, \dfrac{\partial F}{\partial z_i}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$, w których w miejsce zmiennych z, z_j, z_{jl} wstawiono odpowiednio

$$u_2 + \theta\bar{u} , \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \theta \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_j \partial x_l} + \theta \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_j \partial x_l}, \quad 0 < \theta(x, t) < 1 , \quad (j, l = 1, \ldots, m) .$$

Współczynniki te są, według twierdzenia Hadamarda ([4] str. 208), funkcjami ciągłymi punktu (x, t) w obszarze D.

Prawdziwość twierdzenia I wynika z założeń 1°—3° i następującego twierdzenia udowodnionego przez prof. Krzyżańskiego ([3] tw. I str. 132): Jeżeli współczynniki równania liniowego parabolicznego normalnego

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t) u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

są w obszarze $\bar{D}$ ciągłe, $a_{ij}(x, t)$ ograniczone, $b_i(x, t)$ klasy Z_1 $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ zaś $c(x, t) \leqslant \gamma_1 |x|^2 + \gamma_2$ (γ_1, γ_2 — pewne stałe dodatnie), to jedynym rozwiązaniem tego równania regularnym i klasy E_2 w $\bar{D}$ oraz znikającym na powierzchni Σ jest $u(x, t) \equiv 0$.

Wniosek. W klasie $Z_2(A, B)$ funkcji $u(x, t)$ można wykazać jednoznaczność rozwiązania naszego zadania zastępując nierówności w założeniu 2° warunkami słabszymi. Wystarczy mianowicie założyć, że istnieją

---

[1]) tzn. ciągłe w domknięciu $\bar{D}$ i posiadające ciągłe pochodne cząstkowe występujące w równaniu (1), wewnątrz obszaru D.

stałe dodatnie $\bar{L}_0, \bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_6$, przy których są spełnione nierówności

$$2^{\circ\prime} \quad \left|\frac{\partial F}{\partial z_{ik}}\right| \leqslant \bar{L}_0; \quad \left|\frac{\partial F}{\partial z_i}\right| \leqslant \bar{L}_1|x| + \bar{L}_2|u|^{\frac{1}{2}} + \bar{L}_3; \quad \frac{\partial F}{\partial z} \leqslant \bar{L}_4|x|^2 + \bar{L}_5|u| + \bar{L}_6\,^{1)}.$$

Wynika to z twierdzenia cytowanego wyżej, wtedy bowiem

$$\left|\frac{\partial F}{\partial z_i}\right| \leqslant \bar{L}_1|x| + \bar{L}_2(A|x|^2+B)^{\frac{1}{2}} + \bar{L}_3 \leqslant \bar{L}_1|x| + \bar{L}_2(\sqrt{A}|x| + \sqrt{B}) + \bar{L}_3 =$$
$$= (\bar{L}_1 + \bar{L}_2\sqrt{A})|x| + \bar{L}_2\sqrt{B} + \bar{L}_3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} \leqslant \bar{L}_4|x|^2 + \bar{L}_5(A|x|^2+B) + \bar{L}_6 = (\bar{L}_4 + \bar{L}_5 A)|x|^2 + \bar{L}_5 B + \bar{L}_6 .$$

Kładąc

$$L_0 = \bar{L}_0;\ L_1 = \bar{L}_1 + \bar{L}_2\sqrt{A};\ L_2 = \bar{L}_2\sqrt{B} + \bar{L}_3;\ L_3 = \bar{L}_4 + \bar{L}_5 A;\ L_4 = \bar{L}_5 B + \bar{L}_6$$

otrzymujemy, że współczynniki równania (2) spełniają założenia 2°.

Podobnie można uzasadnić, że w klasie $Z_1(A, B)$ funkcji $u(x, t)$ wystarczają założenia

$$2^{\circ\prime\prime} \quad \left|\frac{\partial F}{\partial z_{ik}}\right| \leqslant \bar{\bar{L}}_0; \quad \left|\frac{\partial F}{\partial z_i}\right| \leqslant \bar{\bar{L}}_1|x| + \bar{\bar{L}}_2|u| + \bar{\bar{L}}_3; \quad \frac{\partial F}{\partial z} \leqslant \bar{\bar{L}}_4|x|^2 + \bar{\bar{L}}_5 u^2 + \bar{\bar{L}}_6 ,$$

gdzie $\bar{\bar{L}}_0, \bar{\bar{L}}_1, \ldots, \bar{\bar{L}}_6$ są pewnymi stałymi dodatnimi.

§ 3. Oznaczmy odpowiednio przez S_R^0, S_R^T i σ_R części powierzchni S^0, S^T i σ położone wewnątrz i na Γ_R, zaś C_R niech oznacza część Γ_R zawartą w D. Połóżmy

$$\Sigma_R = S_R^0 + \sigma_R , \qquad \Omega_R = \Sigma_R + C_R .$$

Przyjmujemy następującą hipotezę:

Hipoteza (H). Dla każdej funkcji $\Phi(x, t)$ ciągłej i klasy E_2 w $\bar{D}$ i dla każdego $R > R_0$ istnieje rozwiązanie równania (1) regularne w $\bar{D}_R$ i równe $\Phi(x, t)$ na zbiorze Ω_R.

Oznaczmy

$$f(x, t) = -F(x, t, 0, 0, \ldots, 0) .$$

Udowodnimy następujące

Twierdzenie II. Jeżeli spełniona jest hipoteza (H), założenia 1°—3° oraz funkcja $f(x, t)$ należy do klasy E_2 w $\bar{D}$, a $\varphi(x, t)$ jest daną funkcją

[1]) Prof. Krzyżański udowodnił wcześniej jednoznaczność rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego dla równania parabolicznego prawie-liniowego

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu^2 - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t)$$

(c = const) w klasie Z_2. Wynik ten nie został opublikowany.

ciągłą i klasy E_2 na zbiorze Σ, to istnieje rozwiązanie $u(x, t)$ równania (1) regularne w $\bar{D}$ i równe $\varphi(x, t)$ dla $(x, t) \in \Sigma$.

Rozwiązanie to należy również do klasy E_2.

Dowód. Utwórzmy ciąg rosnący $\{R_n\}$, $R_n > R_0$, $R_n \to \infty$. Niech $\Phi(x, t)$ będzie funkcją ciągłą i klasy E_2 w $\bar{D}$ oraz równą $\varphi(x, t)$ dla $(x, t) \in \Sigma$, zaś p i q dwoma liczbami naturalnymi, $q > p$.

Niech $u_p(x, t)$ będzie rozwiązaniem równania (1) regularnym w $\bar{D}_{R_p}$ i spełniającym warunek

$$u_p(x, t) = \Phi(x, t) \quad \text{na} \quad \Omega_{R_p}.$$

Analogicznie określamy $u_q(x, t)$ w $\bar{D}_{R_p}$.

Mamy

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} = F\left(x, t, u_p, \frac{\partial u_p}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_p}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_m^2}\right).$$

Stosując twierdzenie o przyrostach funkcji widzimy, że $u_p(x, t)$ spełnia w obszarze D_{R_p} równanie liniowe niejednorodne

$$\mathcal{F} u_p \equiv \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}^{(1)} \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} b_i^{(1)} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} + c^{(1)} u_p - \frac{\partial u_p}{\partial t} = f(x, t),$$

gdzie współczynniki $a_{ik}^{(1)}, b_i^{(1)}, c^{(1)}$ są pochodnymi $\frac{\partial F}{\partial z_{ik}}, \frac{\partial F}{\partial z_i}, \frac{\partial F}{\partial z}$, w których w miejsce zmiennych z, z_j, z_{jl} wstawiono odpowiednio

$$\theta_1 u_p, \quad \theta_1 \frac{\partial u_p}{\partial x_j}, \quad \theta_1 \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_j \partial x_l}; \quad 0 < \theta_1(x, t) < 1 \quad (j, l = 1, \ldots, m)$$

i — jak poprzednio — współczynniki te są funkcjami ciągłymi punktu $(x, t) \in D$.

Wprowadźmy funkcję pomocniczą (tzw. dzielnik tłumiący, skonstruowany przez prof. Krzyżańskiego, patrz: [2] oraz [4] str. 190)

$$H(x, t, k) = \exp\left\{\frac{k|x|^2}{1-\mu t} + \nu t\right\}.$$

Oznaczmy odpowiednio przez $D^h, D^h_{R_p}, \Sigma^h, \Sigma^h_{R_p}, \Omega^h_{R_p}$ części zbiorów $D, D_{R_p}, \Sigma, \Sigma_{R_p}, \Omega_{R_p}$ zawarte w warstwie $0 \leqslant t \leqslant h$.

Dla danej liczby $K > 0$ można dobrać (analogicznie jak w pracy [2] z uwzględnieniem [3]) stałe dodatnie $\mu(K)$, $\nu(K)$ oraz dostatecznie małą liczbę $h > 0$, tak by w obszarze D^h zachodziła nierówność

$$\mathcal{F} H(x, t, K) < 0.$$

Stałe μ, ν, h będą zależne od $K, L_0, L_1, \ldots, L_4$ (nie będą zależne od wskaźnika p).

Niech v_p, v_q będą funkcjami określonymi przez związki

$$u_p = v_p H(x, t, K), \qquad u_q = v_q H(x, t, K).$$

Funkcja v_p spełnia w $D^h_{R_p}$ równanie

$$\mathcal{F}^{(1)} v_p \equiv \sum_{i,k=1}^{m} a^{(1)}_{ik} \frac{\partial^2 v_p}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} b^{(1)}_i \frac{\partial v_p}{\partial x_i} + \bar{c} v_p - \frac{\partial v_p}{\partial t} = f_1(x, t),$$

gdzie

$$\bar{c} = \frac{\mathcal{F}H}{H} < 0, \qquad f_1(x, t) = \frac{f(x, t)}{H}.$$

Funkcja $\Phi(x, t)$, na podstawie założenia, należy do klasy $E_2(M_1, K_1)$ natomiast $f(x, t)$ do klasy $E_2(M_2, K_2)$. Oznaczając $M = \max(M_1, M_2)$ i obierając w dzielniku tłumiącym $K = \max(K_1, K_2)$ otrzymujemy, że $\Phi(x, t)$ i $f(x, t)$ należą do klasy $E_2(M, K)$ oraz, że spełnione są nierówności

(3) $\quad |v_p| \leqslant M \quad$ na $\quad \Omega^h_{R_p} \quad$ i $\quad |f_1(x, t)| \leqslant M$ w obszarze $\overline{D^h_{R_p}}$.

Położmy

(4) $$w^{(1)}_p = v_p - Mt, \quad w^{(2)}_p = v_p + Mt.$$

Funkcja $w^{(1)}_p$ spełnia równanie

$$\mathcal{F}^{(1)} w^{(1)}_p = M(1 - \bar{c}t) + f_1(x, t) \geqslant 0,$$

z którego wynika, że $w^{(1)}_p$ nie osiąga wewnątrz obszaru $D^h_{R_p}$ ani na części brzegu $S^h_{R_p}$ maximum dodatniego ([4] str. 177). Na mocy (3) i (4) mamy $w^{(1)}_p \leqslant M$ na $\Omega^h_{R_p}$, a zatem nierówność ta utrzymuje się w całym obszarze $\overline{D^h_{R_p}}$. Według (4)

$$v_p \leqslant M + Mh = M_1 \quad \text{w} \quad \overline{D^h_{R_p}}.$$

Analogicznie, funkcja $w^{(2)}_p$ nie osiąga wewnątrz obszaru $D^h_{R_p}$ ani na części brzegu $S^h_{R_p}$ minimum ujemnego, skąd otrzymujemy $v_p \geqslant -M_1$. Ostatecznie $|v_p| \leqslant M_1$ w $\overline{D^h_{R_p}}$, gdzie stała M_1 jest niezależna od wskaźnika p; mamy więc również $|v_q| \leqslant M_1$ w $\overline{D^h_{R_q}}$.

Oznaczmy

$$u_{pq} = u_p - u_q, \qquad v_{pq} = v_p - v_q.$$

Mamy

(5) $\quad u_{pq} = v_{pq} H(x, t, K) \quad$ oraz $\quad |v_{pq}| \leqslant 2M_1 \quad$ w $\quad \overline{D^h_{R_p}}$.