

Franciszek Bierski

L'évaluation des coefficients d'une classe de fonctions analytiques et univalentes dans l'anneau circulaire

1. Considérons la fonction de la forme

$$(1) \quad f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

Désignons par M la classe de toutes les fonctions (1) analytiques et univalentes dans l'anneau circulaire

$$(2) \quad 1 < |z| < R$$

et par M^* la sous-classe comprenant toutes les fonctions de la classe M à coefficients a_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) réels.

Le but de ce travail est d'établir certaines inégalités pour les coefficients des fonctions de la classe M^* .

2. Lemme 1. Si les b_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) sont réels et la fonction

$$(3) \quad u(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\varphi$$

est de signe constant pour $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, la fonction

$$(4) \quad u_n(\varphi) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{kn} \cos k\varphi \quad (n > 1)$$

est de même signe pour $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Démonstration. Soit $u(\varphi) \leq 0$. Dans ce cas la fonction

$$(5) \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

qui sur la frontière $|z| = 1$ remplit la condition $\operatorname{Re} g(e^{i\varphi}) = u(\varphi)$, en vertu de la formule de Schwarz ([1], p. 444), est analytique pour $|z| < 1$ et $\operatorname{Re} g(z) \leq 0$ pour $|z| \leq 1$.

Désignons par ε_k ($k = 1, 2, \dots, n$) les racines de degré n de l'unité; on sait que

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^l = \begin{cases} 0 & \text{pour } l = 1, 2, \dots, (n-1) \\ n & \text{pour } l = n \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon_k^{n+1} = \varepsilon_k^l.$$

Donc, on a

$$g_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(\varepsilon_k z^{1/n}) = b_0 + b_n z + b_{2n} z^2 + b_{3n} z^3 + \dots$$

ainsi que $\operatorname{Reg}_n(z) \leq 0$, et, par conséquent,

$$u_n(\varphi) = \operatorname{Reg}_n(e^{i\varphi}) = b_0 + b_n \cos \varphi + b_{2n} \cos 2\varphi + \dots \leq 0$$

pour

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Dans le cas $u(\varphi) \geq 0$ la démonstration est analogue.

Lemme 2. Si les b_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) sont réels et la fonction (3) est de signe constant pour $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et $b_0 \neq 0$, on a

$$|b_n| \leq 2|b_0| \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

Démonstration: a) Si $u(\varphi) \leq 0$, la partie réelle de la fonction (5) n'est pas positive, c. à d. $\operatorname{Reg}(z) \leq 0$. Comme $\operatorname{Reg}(0) = b_0$, donc $b_0 < 0$.

Considérons la fonction

$$w(z) = \frac{g(z) - b_0}{g(z) + b_0} = \frac{b_1}{2b_0} z + \dots$$

La fonction $w(z)$ est régulière dans le cercle $|z| < 1$ (car $b_0 < 0$, $\operatorname{Reg}(z) \leq 0$ et $\operatorname{Reg}(z) + b_0 < \operatorname{Reg}(z) - b_0$ pour $|z| < 1$) et satisfait aux conditions suivantes: $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ pour $|z| < 1$; en vertu du lemme de Schwarz ([2], p. 297) $|b_1/2b_0| \leq 1$, c. à d. $|b_1| \leq 2|b_0|$.

b) Pour $n \geq 2$ considérons la fonction (4). En vertu du lemme 1, elle remplit l'hypothèse du lemme 2, donc, en raison de a) on a

$$|b_n| \leq 2|b_0| \quad \text{pour } n = 2, 3, \dots$$

Dans le cas $u(\varphi) \geq 0$ la démonstration est analogue.

3. Théorème. Si la fonction (1) appartient à la classe M^* , ses coefficients remplissent les inégalités suivantes:

$$(6) \quad |a_n| \leq \frac{n}{R^{n-1} - R^{-n-1}} (R^{-n-1} |a_1 - a_{-1}| + |a_1 - a_{-1} R^{-2}|),$$

$$(7) \quad |a_{-n}| \leq \frac{n}{R^{n-1} - R^{-n-1}} (R^{n-1} |a_1 - a_{-1}| + |a_1 - a_{-1} R^{-2}|).$$

Démonstration. La fonction (1) étant supposée univalente dans l'anneau circulaire (2), on a

$$G_1(z_1, z_2) = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \neq 0,$$

pour tous les z_1, z_2 ($z_1 \neq z_2$), situés dans l'anneau circulaire (2). En particulier, pour $z_2 = re^{i\varphi}$, $z_1 = re^{-i\varphi}$ ($1 < r < R$),

$$\begin{aligned} G_1(r, \varphi) &= \dots + \frac{a_{-n}r^{-n}(e^{-in\varphi} - e^{in\varphi})}{r(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})} + \dots + \frac{a_{-1}r^{-1}(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})}{r(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})} + \\ &+ \frac{a_1r(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}{r(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})} + \dots + \frac{a_nr^n(e^{in\varphi} - e^{-in\varphi})}{r(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})} + \dots \\ &= \dots + a_{-n}r^{-n-1} \left(\frac{-2i \sin n\varphi}{2i \sin \varphi} \right) + \dots + a_{-1}r^{-2} \left(\frac{-2i \sin \varphi}{2i \sin \varphi} \right) + a_1 + a_2r \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} + \dots \end{aligned}$$

d'où

$$(8) \quad G_1(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^{n-1} - a_{-n} r^{-n-1}) \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} \neq 0$$

pour $1 < r < R$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; donc, la fonction $G_1(r, \varphi)$ conserve le signe. En multipliant (8) par $2\sin^2\varphi$, nous obtenons

$$G(r, \varphi) = 2\sin^2\varphi G_1(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^{n-1} - a_{-n} r^{-n-1}) 2\sin\varphi \sin n\varphi.$$

La fonction $G(r, \varphi)$ est du même signe que $G_1(r, \varphi)$. En utilisant les formules

$$2\sin\varphi \sin n\varphi = \cos(n-1)\varphi - \cos(n+1)\varphi$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} G(r, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^{n-1} - a_{-n} r^{-n-1}) [\cos(n-1)\varphi - \cos(n+1)\varphi] \\ &= (a_1 - a_{-1}r^{-2})(1 - \cos 2\varphi) + (a_2r - a_{-2}r^{-3})(\cos\varphi - \cos 3\varphi) + \dots + \\ &+ (a_{n-1}r^{n-2} - a_{-n+1}r^{-n})[\cos(n-2)\varphi - \cos n\varphi] + (a_n r^{n-1} - a_{-n} r^{-n-1})[\cos(n-1)\varphi - \\ &- \cos(n+1)\varphi] + (a_{n+1}r^n - a_{-(n+1)}r^{-n-2})(\cos n\varphi - \cos(n+2)\varphi) + \dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} G(r, \varphi) &= (a_1 - a_{-1}r^{-2}) + (a_2r - a_{-2}r^{-3})\cos\varphi + \sum_{n=2}^{\infty} [a_{n+1}r^n - a_{-n-1}r^{-n-2} - \\ &- (a_{n-1}r^{n-2} - a_{-n+1}r^{-n})]\cos n\varphi. \end{aligned}$$

La fonction $G(r, \varphi)$ pour $1 < r < R$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ remplit les conditions du lemme 2, donc

$$(9) \quad \begin{aligned} |a_2r - a_{-2}r^{-3}| &\leq 2|a_1 - a_{-1}r^{-2}| \\ |a_{n+1}r^n - a_{-n-1}r^{-n-2} - (a_{n-1}r^{n-2} - a_{-n+1}r^{-n})| &\leq 2|a_1 - a_{-1}r^{-2}| \quad \text{pour } n \geq 2. \end{aligned}$$

Lorsque $r \rightarrow 1$ ou $r \rightarrow R$ de (9) on tire

$$(10) \quad \begin{aligned} |a_2 - a_{-2}| &\leq 2|a_1 - a_{-1}| \\ |a_2 R - a_{-2} R^{-3}| &\leq 2|a_1 - a_{-1} R^{-2}|, \end{aligned}$$

et, en général

$$(11) \quad \begin{aligned} |a_{n+1} - a_{-n-1} - (a_{n-1} - a_{-n+1})| &\leq 2|a_1 - a_{-1}|, \\ |a_{n+1} R^n - a_{-n-1} R^{-n-2} - (a_{n-1} R^{n-2} - a_{-n+1} R^{-n})| &\leq 2|a_1 - a_{-1} R^{-2}|. \end{aligned}$$

Des inégalités (10) et (11) on obtient par récurrence

$$\begin{aligned} |a_n - a_{-n}| &\leq n|a_1 - a_{-1}| \\ |a_n R^{n-1} - a_{-n} R^{-n-1}| &\leq n|a_1 - a_{-1} R^{-2}| \quad \text{pour } n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(12) \quad \begin{aligned} -n|a_1 - a_{-1}| &\leq -a_n + a_{-n} \leq n|a_1 - a_{-1}| \\ -n|a_1 - a_{-1} R^{-2}| &\leq a_n R^{n-1} - a_{-n} R^{-n-1} \leq n|a_1 - a_{-1} R^{-2}| \quad \text{pour } n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

En multipliant la première des inégalités (12) par R^{n-1} ou bien par R^{-n-1} et en l'ajoutant à la seconde nous obtenons les inégalités (6) et (7).

4. Remarque. Du raisonnement fait ci-dessus il résulte que a_0 peut être un nombre complexe arbitraire. Considérons les fonctions:

$$a) \quad f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z,$$

$$b) \quad f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + z,$$

où a_{-1} et a_1 sont des nombres réels. De la condition d'univalence de ces fonctions dans l'anneau circulaire (2) nous obtenons pour a_1 et a_{-1} les inégalités suivantes:

$$a') \quad a_1 < \frac{1}{R^2} \quad \text{ou} \quad a_1 > 1,$$

$$b') \quad a_{-1} < 1 \quad \text{ou} \quad a_{-1} > R^2.$$

OUVRAGES CITÉS

[1] A. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, Москва 1950.

[2] F. Leja, *Teoria funkcji analitycznych*, Warszawa 1957.