ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
Nr 55 PRACE MATEMATYCZNE. ZESZYT 7 1962

Edward Siwek

Une propriété des p-cônes dans l'espace euclidien à n dimensions

Considérons l'espace euclidien à n dimensions X_n, dont nous désignerons les points par $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Définition. Nous appelons *p-cône* l'ensemble C_p des points de l'espace X_n satisfaisant à l'équation:

$$\Phi(x) \stackrel{df}{=} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k = 0 \tag{1}$$

telle que la forme quadratique $\Phi(x)$ est de la signature p et $\det(a_{ik}) \neq 0$.

Le but de la présente note est de trouver le nombre $N(p, n)$ de composantes connexes de l'ensemble E déterminé par la condition $\Phi(x) \neq 0$.

Comme $N(p, n)$ est un invariant topologique, nous pouvons nous borner au cas où l'équation (1) est de la forme:

$$F(x) \stackrel{df}{=} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k^2 = 0\,, \tag{2}$$

où

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, p \\ -1 & \text{pour} \quad k = p+1, \ldots, n \end{cases}$$

et

$$\frac{n}{2} \leqslant p \leqslant n. \tag{3}$$

Il est évident que:

$$N(p, n) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad p = n \neq 1 \\ 2 & \text{pour} \quad p = n = 1 \\ 3 & \text{pour} \quad p = 2, \quad n = 3 \\ 4 & \text{pour} \quad p = 1, \quad n = 2\,. \end{cases}$$

Il reste à examiner le nombre $N(p, n)$ dans le cas où $n \geqslant 4$, $p < n$.

Théorème. *Dans le cas $n \geqslant 4$ on a*:

$$N(p, n) = \begin{cases} 2 & \text{pour} \quad p < n-1 \\ 3 & \text{pour} \quad p = n-1\,. \end{cases}$$

Démonstration. Admettons les notations suivantes:

$$E_1 \overset{df}{=} \{x\colon F(x) > 0\}\,, \qquad E_2 \overset{df}{=} \{x\colon F(x) < 0\}\,,$$

$$F_1(x) \overset{df}{=} \sum_{i=1}^{p} x_i^2\,, \qquad F_2(x) \overset{df}{=} \sum_{j=p+1}^{n} x_j^2\,.$$

Comme $E = E_1 \cup E_2$ et les ensembles E_1 et E_2 sont ouverts et disjoints, il suffit d'examiner le nombre de composantes connexes des ensembles E_1 et E_2. Nous montrerons que l'ensemble E_1 est toujour connexe pendant que l'ensemble E_2 est connexe dans le cas où $p < n-1$ et il se compose de deux composantes dans le cas où $p = n-1$.

1°. Soient

$$x' = (x_1', \ldots, x_p', x_{p+1}', \ldots, x_n')\,, \qquad x'' = (x_1'', \ldots, x_p'', x_{p+1}'', \ldots, x_n'') \tag{4}$$

deux points appartenants à E_1; alors les points:

$$\bar{x}' = (x_1', \ldots, x_p', 0, \ldots, 0)\,, \qquad \bar{x}'' = (x_1'', \ldots, x_p'', 0, \ldots, 0)$$

appartiennent aussi à E_1. Il est facile de vérifier que les segments $[x', \bar{x}']$ et $[x'', \bar{x}'']$ sont contenus entièrement dans E_1. Les points $\bar{x}'$ et $\bar{x}''$ appartiennent à l'ensemble déterminé par les conditions:

$$F_1(x) > 0\,, \qquad F_2(x) = 0$$

qui est un plan à p dimensions sans le point $0 = (0, \ldots, 0)$.

Comme $p \geqslant 2$ (d'après (3)) cet ensemble est connexe, donc E_1 est aussi connexe.

2°. Supposons maintenant que les points x' et x'' de la forme (4) appartiennent à E_2, alors les segments $[x', \tilde{x}']$ et $[x'', \tilde{x}'']$ où:

$$\tilde{x}' = (0, \ldots, 0, x_{p+1}', \ldots, x_n')\,, \qquad \tilde{x}'' = (0, \ldots, 0, x_{p+1}'', \ldots, x_n'')\,,$$

sont contenus entièrement dans E_2. Les points $\tilde{x}'$ et $\tilde{x}''$ appartiennent à l'ensemble déterminé par les conditions:

$$F_1(x) = 0\,, \qquad F_2(x) > 0$$

qui est un plan à $(n-1)$ dimensions sans le point $0 = (0, \ldots, 0)$.

Dans le cas $p < n-1$ on a $n-p \geqslant 2$ et E_2 est connexe.

Dans le cas $p = n-1$ on a $n-p = 1$ et E_2 se décompose en deux composantes connexes:

$$E_2^+\colon \quad F(x) < 0\,, \quad x_n > 0\,,$$

$$E_2^-\colon \quad F(x) < 0\,, \quad x_n < 0\,.$$

Notre théorème se trouve ainsi démontré.